

Calcolo delle variazioni in più variabili

$$F(u) = \int_0^1 [\dot{u}^2 + (u - f(x))^2] dx$$

↑
funzione data

Problema: $\min_u \{F(u) : u \in C^1([0,1])\}$

Eulero 1ª forma: $\int_0^1 2\dot{u}\dot{v} + 2(u-f(x))v dx = 0 \quad \forall v \in C^1$

Eulero 2ª forma: $\int_0^1 [-\ddot{u} + u - f]v dx + [\dot{u}v]_0^1$

Usando v nulle al bordo + Lemma DBR $\leadsto \ddot{u} = u - f$

Usando ora $v \neq 0$ al bordo $\leadsto \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$

— o — o —

Facciamo lo stesso (l'analogo) in 2 variabili.

Prendo $f(x,y)$ data e considero $u(x,y)$ che minimizza

$$F(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 + (u-f)^2 dx dy$$

Ω
 $\uparrow$
 sottoinsieme dato
 di $\mathbb{R}^2$

$\nwarrow$
 $u_x^2 + u_y^2$

tra tutte le $u \in C^1(\Omega)$.

Scrivo $F(u+tv) = \int_{\Omega} |\nabla(u+tv)|^2 + (u+tv-f)^2 dx dy$

$\nabla u + t \nabla v$

$[(u-f) + tv]^2$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx dy$$

$$+ \int_{\Omega} (u-f)^2 + t^2 v^2 + 2t (u-f)v dx dy$$

Derivo rispetto a t e pongo $t \rightarrow \infty$. A meno di fattori 2 resta

$$\int_{\Omega} [\langle \nabla u, \nabla v \rangle + (u-f)v] dx dy = 0 \quad \forall v \in C^1(\Omega)$$

Eulero 1ª formula

Parenthesi: formula di Gauss - Green o teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$)

$$\boxed{\text{GG1}} \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} ds$$

Flusso di $\vec{E}$ sul bordo

$\boxed{\text{GG2}}$ Data una funzione u e una funzione vettoriale $\vec{V}$ (campo di vettori) si ha

$$\int_{\Omega} \underbrace{u}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{\operatorname{div} \vec{V}}_{\text{numero}} dx dy = \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{n}}_{\text{prod. scalare}} ds - \int_{\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \vec{V}}_{\substack{\text{prod. scalare} \\ \text{tra 2 vettori}}} dx dy$$

$\boxed{\text{GG2} \Rightarrow \text{GG1}}$ Basta prendere $\vec{E} = \vec{V}$ e $u \equiv 1$ e osservare che $\nabla u \equiv 0$.

$\boxed{\text{GG1} \Rightarrow \text{GG2}}$ Basta prendere $\vec{E} = \underbrace{u}_{\text{scalare}} \cdot \underbrace{\vec{V}}_{\text{vettore}}$ e osservare che

$$\operatorname{div} \vec{E} = \underbrace{\nabla u \cdot \vec{V}}_{\substack{\text{prod. scalare} \\ \text{di vettori}}} + \underbrace{u \operatorname{div} \vec{V}}_{\text{prodotto di numeri}}$$

in alternativa $\vec{E} = (u \cdot V_1, u \cdot V_2)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= (u V_1)_x + (u V_2)_y \\ &= \underbrace{u_x V_1 + u V_{1x}}_{\nabla u \cdot \vec{V}} + \underbrace{u_y V_2 + u V_{2y}}_{u \operatorname{div} \vec{V}} \end{aligned}$$

Se scrivo GG1 con questo E ottengo GG2.

Torniamo alla 1ª forma di Eulero

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\Omega} (u - f) v \, dx \, dy$$

Ora

$$\int_{\Omega} \underbrace{\nabla u}_{\text{derivata}} \cdot \underbrace{\nabla v}_{\text{"primitiva"}} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\Omega} v \underbrace{\operatorname{div} \nabla u}_{\Delta u} \, dx \, dy$$

Inserendolo nella 1ª forma di Eulero troviamo

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \vec{n} \, ds}_{\text{termine di bordo}} + \int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v \, dx \, dy$$

che è la seconda forma di Eulero.

Procedo come in dimensione 1:

→ scelgo $v = 0$ al bordo, il primo integrale sparisce, e con un lemma DBR in dim 2 trovo

$$\boxed{\Delta u = u - f} \quad \text{Eulero in forma diff.}$$

→ ora so che il 2º integrale è nullo, quindi deve essere nullo il 1º, quindi usando $v \neq 0$ sul bordo con una specie di lemma DBR ottengo

$$\underbrace{\nabla u \cdot \vec{n}}_{\text{derivata direzionale}} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

$$\leadsto \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0}$$

Neumann in 2 variabili

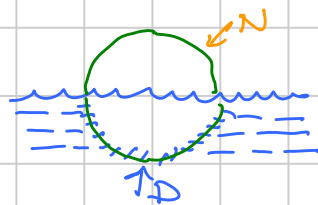
↑
derivata direzionale normale al bordo.

Se partivo con una condizione di Dirichlet, la ritrovavo sull'equazione finale.

Oss. Se assegno D su una parte di $\partial\Omega$, sulla restante nasce N , cioè $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Nell'eq. delle onde o del calore Δ l'equivalente di u_x diventa Δu

Esempio Cocomero immerso a metà nell'acqua.



Dovrei risolvere:

$$u_t = \Delta u \quad t \geq 0 \quad x \in \text{cocomero}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \leftarrow \text{temperatura iniziale}$$

$$u(x, t) = \text{temp. acqua} \quad \text{su mezzo cocomero (superficie immersa)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 \quad \text{su mezzo emerso.}$$

Per risolvere calore / onde in dim 1 su un intervallo era servita la serie di Fourier, ottenuta a partire dalle soluzioni di $\Delta u = -\lambda u$ con BC.

Ora si tratta di risolvere $\Delta u = -\lambda u$ in Ω con le opportune BC.

Caso in cui $\Omega =$ quadrato o rettangolo $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$

Con condizioni D sono autovettori tutte le funzioni del tipo

$$u_{i,j}(x, y) = \sin(ix) \cdot \sin(jy)$$

È immediato verificare che $\Delta u_{i,j} = \underbrace{-(i^2 + j^2)}_{\lambda} u_{i,j}$

Analogamente nel caso N le autofunzioni sono

$$u_{i,j}(x, y) = \cos(ix) \cdot \cos(jy)$$

Fatto meno evidente: sono tutte e sole queste, quindi sono una base ortogonale di $L^2(Q)$.

Conseguenza: ogni $f \in L^2(Q)$ la posso scrivere come

$$\sum_{i,j} c_{i,j} \sin(ix) \sin(jy)$$

$$\downarrow \frac{1}{\text{cost}} \int_Q f(x,y) \sin(ix) \sin(jy) dx dy$$

$$\text{cost} = \int_Q \sin^2(ix) - \sin^2(jy) dx dy = \text{si calcola.}$$

Fatto generale

$$v = \sum c_i e_i$$

$$\langle v, e_i \rangle = c_i \langle e_i, e_i \rangle \Rightarrow c_i = \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

— o — o —