

Equazione delle onde in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

NO B.C.

cerco una funzione $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ che risolva il problema.

Su tutto $\mathbb{R}$ cerco una soluzione del tipo

$$u(x, t) = v(x+ct, x-ct)$$

per una opportuna funzione $v(z, w)$.

Calcolo u_{tt} e u_{xx} con la chain rule:

$$u_t = v_z \cdot c + v_w \cdot (-c) = c v_z - c v_w$$

$$u_{tt} = c^2 v_{zz} + c v_{zw}(-c) - c^2 v_{wz} + c^2 v_{ww}$$

$$u_{tt} = c^2 v_{zz} + c^2 v_{ww} - 2c^2 v_{zw}$$

$$u_x = v_z + v_w$$

$$u_{xx} = v_{zz} + 2v_{zw} + v_{ww}$$

Se impongo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ resta $-2c^2 v_{zw} = 2c^2 v_{zw}$
quindi l'unica possibilità è

$$v_{zw} = 0$$

da qui si deduce $v_z = \delta(z)$ $v = f(z) + g(w)$

Ritornando in u abbiamo che

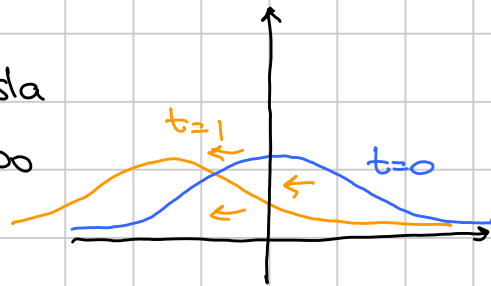
$$u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Come sono fatti i 2 addendi

$f(x+ct)$ = è un profilo fisso che trasla verso sx al crescere del tempo con velocità c

= TRAVELING WAVE

(profilo fisso che trasla a sx)



$g(x-ct)$ = TRAVELING WAVE che va verso destra

Ogni soluzione è somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta

Come trovo f e g sulla base delle cond. iniziali

$$u_0(x) = u(x, 0) = f(x) + g(x)$$

$$u_t(x, t) = c f'(x+ct) - c g'(x-ct)$$

$$u_1(x) = u_t(x, 0) = c [f'(x) - g'(x)]$$

Derivo la 1ª condizione e ottengo

$$u_0'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{u_1(x)}{c} = f'(x) - g'(x)$$

Sommando:

$$f'(x) = \frac{u_0'(x)}{2} + \frac{u_1(x)}{2c}$$

$$g'(x) = \frac{u_0'(x)}{2} - \frac{u_1(x)}{2c}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(z) dz$$

$$g(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(z) dz$$

Bhe i mettere costanti, ma alla fine se ne andrebbero

In conclusione

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z) dz$$

Caso particolare: se fosse $u_1 \equiv 0$ (velocità nulla all'inizio), sarebbe come se $u_0(x)$ si spettesse in $\frac{u_0(x)}{2} + \frac{u_0(x)}{2}$ e i due pezzi traslano verso dx e sx.

DOMINIO DI DIPENDENZA Fisso un pto x_0 e fisso un istante t_0 .
Da cosa dipende $u(x_0, t_0)$?

Risposta: dipende solo da

- due valori di $u_0(x)$ e cioè $u_0(x_0 \pm ct_0)$
- tutti i valori di $u_1(x)$ nell'intervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$.

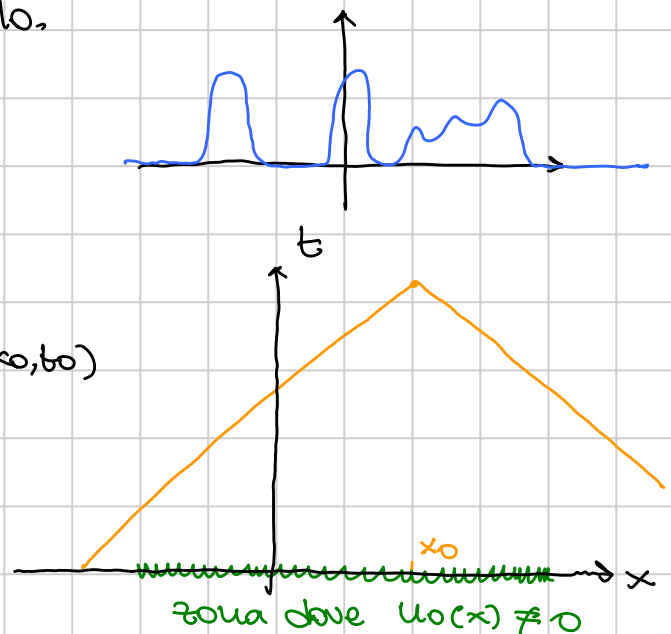
Nello spazio-tempo il valore in (x_0, t_0) dipende dai valori di $u_0(x, t)$ e $u_1(x, t)$ nel cono con vertice in (x_0, t_0) e pendenza proporz. a c .



Caso particolare Supponiamo che $u_1(x) \equiv 0$ e supponiamo $u_0(x)$ nulla fuori da un intervallo.

In ogni x_0 prima o poi almeno che $u(x_0, t) = 0$

Appena il cono finisce fuori, in (x_0, t_0) c'è $u = 0$.



Analogamente, se anche $u_1(x) = 0$ fuori da un intervallo $[a, b]$, allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si avrà che

$$u(x_0, t) = \frac{1}{2c} \int_a^b u_1(z) dz \quad \forall t \text{ abbastanza grande}$$

↑
non appena $[x_0 - ct, x_0 + ct] \supseteq [a, b]$

Parentesi In più dimensioni ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) l'equazione delle onde diventa

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad (+ u_{zz} \text{ in } \mathbb{R}^3)$$

$$= \Delta u$$

Ci sono formule analoghe, solo più complicate.

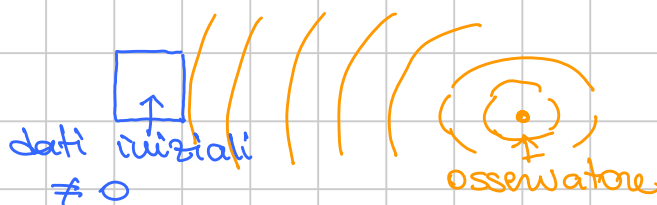
Vale però il discorso del dominio di dipendenza, cioè $u(x_0, t_0)$ dipende

- * in $\mathbb{R}^2$ dai valori dei dati iniziali nel cerchio di centro x_0 (p.to del piano) e raggio ct_0 (idem in dim. pari)
- * in $\mathbb{R}^3$ solo dai valori sulla superficie sferica (idem in dim. dispari ≥ 3)

Differenza tra dim. 2 e dim. 3.

- in dim 2 c'è dipendenza dal cerchio, interno compreso
- in dim 3 dalla sola superficie sferica.

Esempio in $\mathbb{R}^2$



appena il cerchio con centro nell'osserv. e raggio ct_0 tocca la zona con dati iniz. $\neq 0$ inizia a essere $u \neq 0$ nel punto dell'osserv.

In $\mathbb{R}^3$ appena la sfera supera i dati iniziali, torna ad essere $u = 0$ nel p.to dell'osservatore.

Tornado in dim. 1