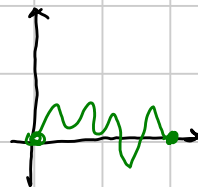


Equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in [0, l], t \geq 0 \\ \text{BC dei soliti tipi} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Modello A t fisso, $x \rightarrow u(t, x)$ è la configurazione di una corda che vibra.



→ BC rappresentano le condizioni al bordo per la corda (D: estremo fisso, N: estremo libero, P: Corda infinita periodica)

→ $u_0(x)$ è la posizione iniziale della corda

→ $u_1(x)$ è la velocità iniziale di ogni p.to della corda

→ u_{tt} = accelerazione che dipende da u_{xx}

L'approccio è lo stesso del calore. Scrivo $u(x, t)$ nella forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \underline{e_k(x)}$$

↑ base ortogonale di $L^2(0, l)$ con le BC date

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t) e_k(x)$$

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) (-\lambda_k) e_k(x)$$

Quindi impongo $u_k''(t) = -\lambda_k u_k(t)$ e ottengo

$$u_k(t) = a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$$

dove a_k e b_k li devo determinare sulla base delle cond. iniziali,

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) e_k(x) = u(x, 0)$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(0) e_k(x) = u_t(x, 0)$$

Quindi

$$\begin{aligned} u_k(0) &= u_{0k} & \leadsto a_k &= u_{0k} \\ u'_k(0) &= u_{1k} & \leadsto b_k \sqrt{\lambda_k} &= u_{1k} \end{aligned}$$

Quindi

$$u_k(t) = u_{0k} \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{u_{1k}}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$$

Conclusione

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{0k} \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{u_{1k}}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right] e_k(x)$$

ROAD MAP

- ① Scegli $e_k(x)$ e λ_k sulla base delle BC
- ② Trovo u_{0k} e u_{1k} scrivendo le componenti dei dati iniziali
- ③ Uso la formula scritta sopra

Caso particolare

Condizioni D-D (corda fissa agli estremi)
 $l = \pi$. Allora $e_k(x) = \sin(kx)$ e $\lambda_k = k^2$.

La formula diventa

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{0k} \cos(kt) + \frac{u_{1k}}{k} \sin(kt) \right] \sin(kx)$$

Stima energetica

$$E(t) = \underbrace{\int_0^l u_t^2(x, t) dx}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\int_0^l u_x^2(x, t) dx}_{\text{energia potenziale di tipo elastico}}$$

Supponendo di poter fare le derivate

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \int_0^l 2 u_t \underbrace{u_{tt}}_{u_{xx}} dx + \underbrace{\int_0^l 2 u_x u_{xt} dx}_{\text{integro per parti}} \\
 &= \underbrace{2 \int_0^l u_t u_{xx} dx}_{\text{0}} - 2 \int_0^l u_{xx} u_t dx + 2 \underbrace{[u_x u_t]_0^l}_{\text{con tutte le cond. alite}}
 \end{aligned}$$

$$[u_x u_t]_0^l = u_x(l, t) u_t(l, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)$$

Se è N-N si annullano entrambi i termini per colpa di u_x

Se è D-D allora $u(l, t) = 0$ per ogni t , quindi $u_t(l, t) = 0$ per ogni t , e lo stesso vale per $x = 0$, quindi entrambi i termini si annullano per colpa di u_t .

Nel caso periodico avviene qualcosa di simile.

Conclusione: con le condizioni al bordo classiche l'energia si conserva.

Riccola osservazione su BC per calore e onde

→ come faccio se sono $u(0, t) = 5$ e $u(l, t) = 7$.

Basta osservare che

- 1- tutte le rette fisse $u(x, t) = ax + b$ sono soluzioni gratis per calore ed onde
- 2- le equazioni sono lineari, quindi se u e v sono soluz. allora anche $u+v$ è soluzione
- 3- basta risolvere con dato D-D nullo e poi aggiungere la retta fissa che interpola i dati giusti al bordo.

Ovviamente devo aggiustare la condizione iniziale.

— 0 — 0 —

Regolarità per l'equazione delle onde

Se l'eq. del calore "migliorava" il dato $u_0(x)$, questo non accade per l'eq. delle onde.

Supponiamo che $u_1(x) \equiv 0$, quindi velocità iniziale nulla, quindi $u_{1,k} = 0$ e quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{u_{0k}}_{\text{coeff}} \cos(\sqrt{\lambda_k} t) e_k(x)$$

Se $u_0(x) \in L^2$, allora $\sum u_{0k}^2 < +\infty$, e per fortuna

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}^2 \cos^2(\sqrt{\lambda_k} t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$$

quindi se era L^2 all'inizio resta L^2 per tutti i $t \geq 0$, ma in generale niente di più.

Supponiamo ora che $u_0(x) \equiv 0$, cioè $u_{0k} \equiv 0$. Allora

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) e_k(x)$$

Se $u_1(x) \in L^2$, allora $\sum u_{1k}^2 < +\infty$, quindi

$$\sum u_{1k}^2 \frac{1}{\lambda_k} \sin^2(\sqrt{\lambda_k} t) < +\infty \quad \text{ma anche}$$

$$\sum k^2 \left[u_{1k}^2 \frac{1}{\lambda_k} \sin^2(\sqrt{\lambda_k} t) \right] < +\infty$$

$\uparrow$
circa k^2

Fatto generale

$$\sum a_k^2 < +\infty \Leftrightarrow \sum a_k e_k(x) \in L^2$$

$$\sum k^2 a_k^2 < +\infty \Leftrightarrow \sum a_k e_k(x) \in H^1$$

Quindi $u_1(x) \in L^2 \Rightarrow$ soluzione in H^1

Morale : c'è uno sfasamento di 1 tra gli spazi, in particolare se

$u_0 \in H^1$ e $u_1 \in L^2$, allora la soluzione sta in H^1

Ancora più in generale :

se $u_0 \in H^\alpha$ e $u_1 \in H^{\alpha-1}$, allora la soluzione sta in H^α

Dove sta u_t ? Nelle ipotesi di sopra sta in $H^{\alpha-1}$ perché il $\sqrt{\lambda_k} \sim k$ che esce derivando rispetto a t si "mangia" uno dei k che erano presenti.

Se voglio soluzioni abbastanza regolari, devo prendere dati abbastanza regolari.

— o — o —