

Regolarità per l'equazione del calore

D-D in un intervallo $[0, l]$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-\lambda_k t} e_k(x)$$

Supponiamo di avere dato iniziale $u_0(x) \in L^2((0, l))$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}^2 = \int_0^l [u_0(x)]^2 dx < +\infty$$

quindi $u_{0k} \rightarrow 0$ ed in particolare sono limitati, quindi esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|u_{0k}| \leq M \quad \forall k \geq 1.$$

Inoltre $\lambda_k = k^2 \frac{\pi^2}{l^2}$ ed $e_k(x) = \sin\left(k \frac{\pi}{l} x\right)$

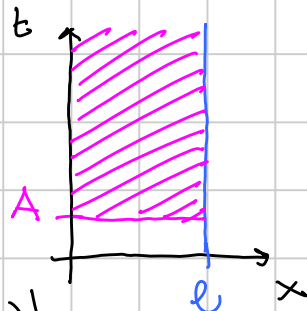
Penso

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x, t)$$

" $u_{0k} e^{-\lambda_k t} e_k(x)$

Dimostro che la serie converge totalmente, dunque uniformemente, su tutti gli insiemi del tipo $x \in [0, l] \quad t \geq A > 0$

(Commento: le storie di conv. tot., unif., valgono uguali per funzioni di 2 o più var.)



$$\sup_{\substack{x \in [0, l] \\ t \geq A}} |f_k(x, t)| = \sup_{\substack{x \in [0, l] \\ t \geq A}} \underbrace{|u_{0k}|}_{\leq M} \cdot \underbrace{e^{-\lambda_k t}}_{\leq e^{-\lambda_k A}} \cdot \underbrace{|e_k(x)|}_{\leq 1}$$

$$\leq M e^{-\lambda_k A}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \sup \dots &\leq M \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k A} = \\ &= M \sum_{k \geq 1} e^{-\text{coeff. } k^2} < +\infty \end{aligned}$$

Quindi c'è convergenza totale!!!

Mostriamo che $u_{xx}(t, x)$ converge e

$$u_{xx}(t, x) = \sum_{k \geq 1} \underbrace{u_{0k} e^{-\lambda_k t} (-\lambda_k) e_k(x)}_{f_{kxx}(x, t)}$$

Per farlo basta verificare la convergenza totale della serie

$$\sup_{\substack{x \in [0, l] \\ t \geq A}} |f_{kxx}(x, t)| \leq M e^{-\lambda_k A} \lambda_k \cdot 1 = M \frac{k^2 \pi^2}{l^2} e^{-k^2 \cdot \text{coeff.}}$$

e ancora una volta c'è convergenza. Quindi u_{xx} esiste ed è quello che uno si aspetta per ogni $x \in [0, l]$ e per ogni $t > 0$.

Idem per u_t

Stesso discorso per una qualunque derivata parziale di qualunque ordine in x e t . Moralmente: scendiamo potenze di k (2 per ogni derivata wrt a t e 1 per ogni derivata wrt a x) però il termine $e^{-k^2 \cdot \text{coeff}}$ sistema la conv. totale.

Quindi le soluz. dell'eq. del calore sono C^∞ in $[0, l] \times (0, +\infty)$ anche se il dato $u_0(x)$ è pessimo. ↑ escluso

DBC $\leadsto$ ghiaccio a temperatura 0 in quell'estremo

NBC $\leadsto$ NO FLUX CONDITION = non entra o esce calore

$\leadsto$ estremo isolato termicamente

Se ho NBC in tutti e 2 gli estremi un aspetto che ci sia convergenza ad una temperatura costante in tutti i punti è uguale alla media di $u_0(x)$.

Conto energetico $E(t) = \int_0^l u(x,t) dx = \text{calore totale della sbarretta}$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^l u_t(x,t) dx = \int_0^l u_{xx}(x,t) dx \\ &= [u_x(x,t)]_{x=0}^{x=l} \\ &= u_x(l,t) - u_x(0,t) \end{aligned}$$

$= 0 \rightarrow$ sia se ho condizioni N-N
 $\rightarrow$ sia se ho condizioni P

quindi $E(t)$ è costante lungo la soluzione.

Formula risolutiva $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e^{-\lambda_k t} \cos\left(k \frac{\pi}{l} x\right)$
 $\lambda_k = k^2 \frac{\pi^2}{l^2}$

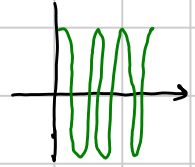
Dal p.to di vista della convergenza è come il caso D-D, quindi conv. tot. e dunque unif. in $[0, l] \times [A, +\infty)$ con $A > 0$, sia per u sia per le sue derivate.

Quando $t \rightarrow +\infty$, tutti i termini con $k \geq 1$ tendono a 0 esponenzialmente. Resta solo quello con $k=0$

$$u(x,t) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-\lambda_k t} e_k(x)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty}}$$

$\downarrow$
 $\int_0^l u_0(x) dx$

Oss. Più un termine è oscillatorio (k grande), più λ_k è grande, più l'abbattimento $e^{-\lambda_k t}$ è veloce



Seconda stima energetica

Consideriamo

$$F(t) = \int_0^l [u(x,t)]^2 dx$$

(norma L^2 della sol. al tempo t)

$$F'(t) = \int_0^l 2u u_t dx = 2 \int_0^l u u_{xx} dx \quad (\text{integrazione per parti})$$

$$= -2 \int_0^l u_x^2 dx + 2 [u u_x]_{x=0}^{x=l}$$

$= 0$ in tutti i casi

D-D, D-N, N-N, P, N-D

$$\leq 0$$

quindi $F(t)$ è deb. decrescente lungo le traiettorie.

— o — o —

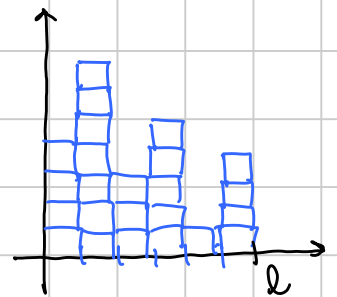
INTERPRETAZIONE STATISTICA

Brutalmente, penso al grafico di $u_0(x)$ come una pila di casse (ho discretizzato lo spazio).

Discretizzo anche il tempo, cioè penso ad istanti $t=0, t=R, t=2R, t=3R, \dots$

Dall'istante kR all'istante $(k+1)R$ ogni cassa decide con prob. $\frac{1}{2}$ se andare a dx o sx.

Questo "mima" l'equazione del calore



$C_{i,k}$ = casse nella location i al tempo k

↑ spazio ↑ tempo

$$C_{i,k+1} = \frac{1}{2} C_{i+1,k} + \frac{1}{2} C_{i-1,k}$$

↑
in media

segue dalla legge dichiarata

Sottraggo $C_{i,k}$

$$C_{i,k+1} - C_{i,k} = \frac{1}{2} C_{i+1,k} + \frac{1}{2} C_{i-1,k} - C_{i,k}$$

$$C_{i,k+1} - C_{i,k} = \frac{C_{i+1,k} + C_{i-1,k} - 2C_{i,k}}{2}$$

Divido per il passo temporale Δt

$$\frac{C_{i,k+1} - C_{i,k}}{\Delta t} = \frac{C_{i+1,k} + C_{i-1,k} - 2C_{i,k}}{2\Delta t}$$

"
 u_t



$$\frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

$\frac{1}{2} u_{xx}$ se Δt è il quadrato del
passo spaziale



$$\frac{u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}$$

Fatto generale

$$\frac{f(x+k) + f(x-k) - 2f(x)}{2k^2} =$$

$$= \frac{\cancel{f(x)} + k \cancel{f'(x)} + \frac{1}{2} k^2 f''(x) + \cancel{f(x)} - k \cancel{f'(x)} + \frac{1}{2} k^2 f''(x) - 2\cancel{f(x)}}{2k^2}$$

$$= \frac{f''(x)}{2}$$