

Problemi di evoluzione: $\rightarrow$ Eq. del calore
 $\rightarrow$ Eq. delle onde

{ Equas. diff. alle derivate parziali
 { BC (condizioni al bordo)
 { Condizioni iniziali

EQ. DEL CALORE

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Eq. del calore

B.C. (Dirichlet)

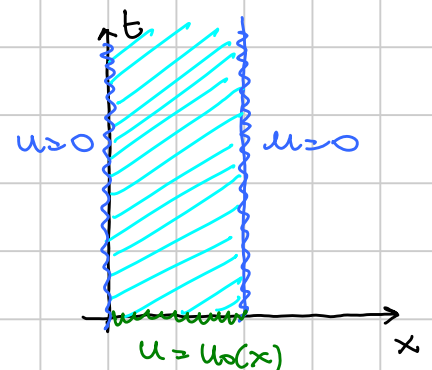
DATO INIZIALE

L'incognita è $u(x,t)$ con $x \in [0,1]$ o $x \in [0,l]$
 $t \geq 0$
 spazio $\uparrow$ tempo $\uparrow$

Fisicamente: $[0,1]$ è una sbarretta e
 $u(x,t)$ = temperatura al tempo t nel p.to x

Il dato iniziale $u_0(x)$ = temperatura nel p.to x al tempo $t=0$

La zona di definizione di $u(x,t)$ è una striscia



Due mentalità diverse

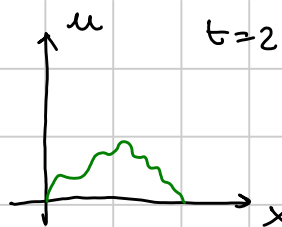
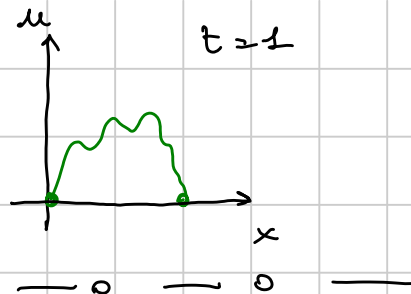
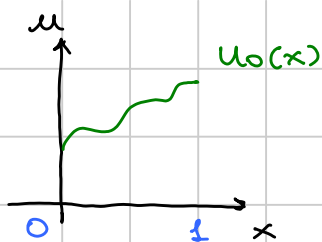
① Vedere u come una funzione di 2 variabili x e t

② Vedere u come $u: [0, +\infty) \rightarrow X$

Ad ogni tempo $t \geq 0$ considero la $\uparrow$ spazio di funzioni della x
 funzione della sola x che descrive la temperatura al tempo t

$$x \rightarrow u(t, x)$$

$\uparrow$
fisso



Come si risolve? Pensiamo all'approccio 2, con $X = L^2((0,1))$

Ad ogni $t \geq 0$ sviluppiamo u in serie di Fourier usando le condizioni al bordo opportune (nell'esempio D-D)

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k(x)$$

$\uparrow$
 k -esimo elemento della
 base ortogonale

Calcoliamo $u_t(t, x)$ e $u_{xx}(t, x)$.

Supponiamo di poter scambiare serie e derivate.

$$u_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) e_k(x)$$

$$u_{xx}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e''_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) (-\lambda_k) e_k(x)$$

$\uparrow$
 Ho usato che $e''_k = -\lambda_k e_k$,
 come erano stati
 ottenuti gli elem.
 della base

Se impongo $u_t = u_{xx}$ ottengo

$$u'_k(t) = -\lambda_k u_k(t)$$

uguaglio le componenti

da cui $u_k(t) = u_k(0) e^{-\lambda_k t}$ per ogni $t \geq 0$

Che sono $u_k(0)$? Mettendo $t=0$

$$u_0(x) = u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) e_k(x)$$

$\uparrow$
 comp. del dato iniziale.

Riassumendo, la ROAD MAP è

- ① Considero una base ortogonale di $L^2((0,1))$ fatta da autovettori della "primitiva seconda" con le BC che stanno nel problema
- ② Sviluppo il dato iniziale rispetto a questa base

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{M_{0k}}_{u_k(0)} e_k(x)$$

- ③ La soluzione è data dalla formula

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} M_{0k} e^{-\lambda_k t} e_k(x)$$

$-\lambda_k$ sono gli autovalori nel senso che $e_k'' = -\lambda_k e_k$

Perché funziona? Brutalmente

- per $t=0$ ottengo proprio $u_0(x)$
- le BC sono soddisfatte per la scelta di $e_k(x)$
- l'eq. è soddisfatta se posso scambiare la serie con la derivata,

— o — o —

Caso molto speciale: soluzioni con una sola componente di F ,
cioè soluzioni del tipo

$$u(t, x) = f(t) \cdot g(x)$$

Imponiamo che sia soluzione

$$u_t = f'(t) \cdot g(x)$$

$$u_{xx} = f(t) \cdot g''(x)$$

$$u_t = u_{xx} \Leftrightarrow f'(t) \cdot g(x) = f(t) \cdot g''(x) \quad \text{se posso dividere}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$$

L'unica possibilità è che siano costanti,
diciamo $= c$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = c \rightsquigarrow f'(t) = c f(t) \rightsquigarrow f(t) = f(0) e^{ct}$$

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = c \rightsquigarrow g''(x) = c g(x) \rightsquigarrow \text{se voglio D-D al bordo deve essere } c = -\lambda$$

$$\text{e } g(x) = \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Ogni soluzione è somma di queste soluzioni speciali

Esempio Prendiamo $[0, 1]$ con cond. D-D e $u_0(x) \equiv 1$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = 1 \end{cases}$$

CALORE

ICE



Seguo la ROAD MAP

① Uso la serie di F. D-D in $[0, 1]$: $e_k(x) = \sin(k\pi x)$
Chi sono i λ_k ?

$$e_k''(x) = -\underbrace{\pi^2 k^2}_{\lambda_k} e_k(x)$$

② Sviluppo $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e_k(x)$

$$u_{0k} = \frac{\langle 1, e_k(x) \rangle}{\langle e_k(x), e_k(x) \rangle} \quad \leftarrow \text{prod. scalari in } L^2([0, 1])$$

$$\langle 1, e_k(x) \rangle = \int_0^1 \sin(k\pi x) dx = \frac{1}{k\pi} (-\cos(k\pi x)) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{k\pi} (-\cos(k\pi) + 1) = \frac{2}{k\pi} \quad \text{se } k \text{ è dispari}$$

$$= 0 \quad \text{se } k \text{ è pari}$$

$$\langle e_k(x), e_k(x) \rangle = \int_0^1 \sin^2(\underbrace{kx}_y) dx = \int_0^{k\pi} \sin^2 y \cdot \frac{1}{k} dy = \frac{1}{k} \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $u_{0k} = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2 k}$ se k è dispari
 $= 0$ se k è pari

$$u_0(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x) + \frac{1}{5} \sin(5\pi x) + \dots \right)$$

③ Allora per la formula

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-\lambda_k t} e_k(x)$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left[e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + \frac{e^{-9\pi^2 t}}{3} \sin(3\pi x) + \dots \right]$$

Da questa si vede che per $t > 0$ la $u(t, x)$ è nulla al bordo e per $t \rightarrow \infty$ tutto tende a 0.

Per fare questo sto scambiando serie e limiti, cosa che posso fare solo se ho convergenza uniforme, cosa che andrò dimostrata (utilizzando a favore gli esponenziali negativi)

— 0 — 0 —