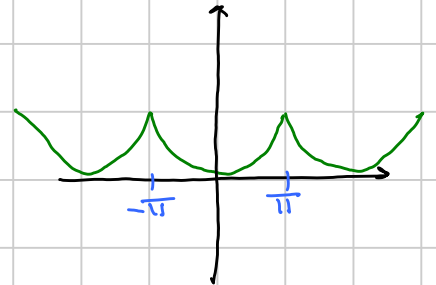


Esercizio classico Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Idea: considero $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$, la estendo per periodicità e sviluppo di tipo (P).

Equivalente: la considero in $[0, \pi]$ e sviluppo di tipo (N-N).



$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

Niente sin(kx)
perché è pari

$$a_0 = \text{media di } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\cos t} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\cos t} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx$$

Calcolo la primitiva:

$$\int x^2 \cos(kx) dx = x^2 \sin(kx) \cdot \frac{1}{k} - \int \frac{1}{k} \sin(kx) \cdot 2x dx$$

$$= \frac{1}{k} x^2 \sin(kx) - \frac{2}{k} \int x \sin(kx) dx$$

$$= \frac{1}{k} x^2 \sin(kx) - \frac{2}{k} \left[x \frac{-\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k} \int \cos(kx) dx \right]$$

$$= \frac{1}{k} x^2 \sin(kx) + \frac{2}{k^2} x \cos(kx) - \frac{2}{k^3} \sin(kx)$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{k^2} \pi \cos(k\pi) = \frac{2}{k^2} \pi (-1)^k$$

La costante al denominatore è

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx & \quad \text{Pongo } y = kx \quad dx = \frac{1}{k} dy \\ &= \int_0^{2k\pi} \cos^2(y) \frac{1}{k} dy = \frac{1}{k} \cdot \underbrace{\int_0^{2k\pi} \cos^2(y) dy}_{\text{metà lunghezza intervallo}} = \frac{k\pi}{k} = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi} \quad a_k &= \frac{2}{\text{cost}} \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{k^2} \pi (-1)^k \\ &= (-1)^k \frac{4}{k^2} \end{aligned}$$

Conclusione

$$f(x) = \underbrace{\frac{\pi^2}{3}}_{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{4}{k^2}}_{a_k} \cos(kx)$$

La serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ e pure uniformemente, la convergenza puntuale è per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Pongo $x = \pi$

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{(-1)^k} \frac{4}{k^2} \cos(\cancel{k\pi})$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \text{da cui la tesi.}$$

— 0 — 0 —

Allo stesso modo si calcola $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ con a intero pari

Esercizio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

— 0 — 0 —

Esercizio Sviluppare $f(x) \equiv 1$ in $[0, \pi]$ con serie (D-D)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\sin(kx)}_{(D-D) \text{ in } [0, \pi]}$$

$$b_k = \frac{1}{\text{cost}} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx &= \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{k} [-\cos(kx)]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{k} [-\cos(k\pi) + 1] = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{cost} = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2(kx)}_y dx = \int_0^{k\pi} \sin^2 y \frac{1}{k} dy = \frac{1}{k} \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{k} = \frac{4}{\pi k} \quad \text{se } k \text{ è dispari, } 0 \text{ se } k \text{ è pari}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin((2m+1)x)$$

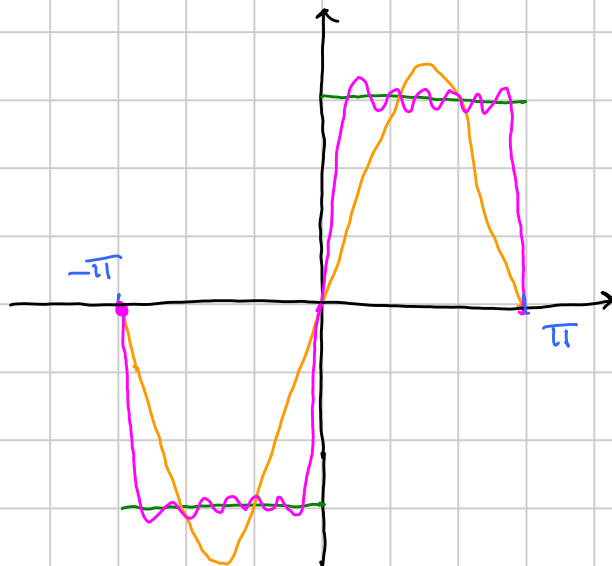
Questa converge puntualmente a 1 per $x \in (0, \pi)$, anzi ovunque tranne nei multipli di π dove invece converge a 0.
Converge unif. in $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Come sono le somme parziali?

$$\frac{4}{\pi} \sin x$$

$$\frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x))$$

$$\frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x))$$



Mettendo $x = \frac{\pi}{2}$ si ritrova una formula nota. I si fanno ± 1 :

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

da cui $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

(si ottiene anche mettendo $x=1$ nello sviluppo di $\arctan x$)
— 0 — 0 —

Funzioni vs derivate Caso (P), ma gli altri sono uguali:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx)$$

È ragionevole che

$$f'(x) = -\sum_{k \geq 1} k a_k \sin(kx) + \sum_{k \geq 1} k b_k \cos(kx)$$

e così via.

Qui è il coeff. di $\cos(kx)$ nello sviluppo di $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dots} \int_0^{2\pi} f'(x) \cdot \cos(kx) dx &= \boxed{\frac{1}{\dots} [f(x) \cos(kx)]_0^{2\pi}} \quad \text{= 0 per periodicità} \\ &+ \frac{1}{\dots} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot k \sin(kx) dx \\ &= k b_k \end{aligned}$$

Questo dimostra la formula.

Quello che ho veramente usato è lo scaricamento da derivata debole, quindi basta che $f'(x)$ sia la derivata debole di f .

Punto della situazione:

$$f \in L^2 \Leftrightarrow \underbrace{\sum (a_k^2 + b_k^2)}_{= \int_0^{2\pi} f^2(x) dx} < +\infty \quad (\text{quindi } a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0)$$

$$f \in H^1 \Leftrightarrow \sum k^2 (a_k^2 + b_k^2) < +\infty \quad (\text{quindi } k a_k \rightarrow 0, k b_k \rightarrow 0)$$

$$f \in H^{4/3} \Leftrightarrow \sum k^{9/4} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$$

$$f \in H^{1/2} \Leftrightarrow \sum k^{2\sqrt{2}} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$$

Sapere che i coeff. tendono a 0 velocemente consente a dimostrare facilmente la convergenza totale, quindi anche l'uniforme.

$$\underbrace{\sum (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))}_{\max | \dots | \leq a_k + b_k}$$

— o — o —