

Convergenza di serie di Fourier Per semplicità $(a,b) = (0,l)$

Ogni $f \in L^2((0,l))$ si può scrivere come serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x)$$

dove $\{u_k(x)\}$ è una qualunque delle basi ortogonali trovate in precedenza.

Achtung! Usare basi diverse porta a sviluppi diversi.

Oss. In ogni caso $c_k = \frac{1}{d_k} \int_0^l f(x) \cdot u_k(x) dx$ dove

$$d_k = \int_0^l [u_k(x)]^2 dx$$

$\begin{matrix} \nearrow \\ \frac{\langle f, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \end{matrix}$

Domanda: in che senso la serie converge ad $f(x)$?

Risposta banale: nel senso L^2 del termine, cioè le somme parziali $S_n(x) \rightarrow f(x)$ in L^2 , cioè

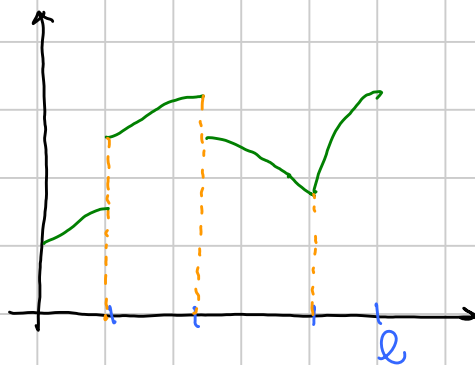
$$\int_0^l |f(x) - S_n(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

In particolare questo non dice nulla a x fisso.

Obiettivo: sotto opportune ipotesi avere convergenza migliore.

Def. Una funzione $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice C^1 a tratti se esistono p.ti $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < l$ tali che

- f è C^1 in ogni sottointervallo
- in ognuno dei p.ti x_i esistono il limite dx e sx di f e f' magari diversi.



Consideriamo la serie di F. di tipo (P), cioè stiamo scrivendo

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2 \frac{\pi}{l} kx\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2 \frac{\pi}{l} kx\right)$$

Teorema misterioso 1 (Convergenza puntuale)

Supponiamo che $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ sia C^1 a tratti.

Allora la serie di F di tipo (P) converge puntualmente a

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
limite limite
destro sinistro

In particolare la serie converge

- a $f(x)$ nei p.ti in cui f è continua
- alla media dei limiti dx e sx nei p.ti in cui non è continua.

Teorema misterioso 2 (Conv. uniforme)

Se f è C^1 a tratti e continua, allora la convergenza è uniforme, anzi totale.

Teorema misterioso 3 (Generalizza il precedente)

Se f è C^1 a tratti, allora la convergenza è uniforme in ~~tutti~~ gli intervalli chiusi che non contengano p.t.i di discontinuità.

— o — o —

Cosa si può dire negli altri casi? (D-D), (N-N), (D-N)

Idea: tutti questi casi si riducono al precedente mediante opportune simmetrie!

Oss. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e dispari

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx)$$

In questo caso NON servono i coseni e neanche a_0

Dim.

$$a_k = \frac{1}{\text{cost.}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\dots} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

↑
l'integrale è lo stesso
su un periodo
qualsunque

0
perché integrale
di una funzione
dispari su
intervallo simmetrico

Analogamente nello sviluppo di una funzione pari NON ci sono i seni.

Supponiamo ora di avere $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ e di volerla sviluppare (D-D), cioè usando la base

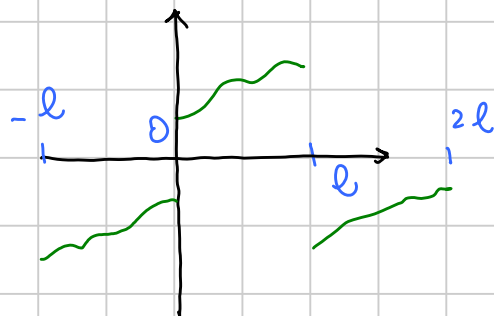
$$u_k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{l} k x\right)$$

Allora posso:

① estendo la funzione a $[-l, l]$ per disparità

② volendo posso di estendere a tutto $\mathbb{R}$ per $2l$ -periodicità. Sia $\hat{f}$ l'estensione.

③ lo sviluppo di tipo (P) sull'intervallo $[0, 2l]$



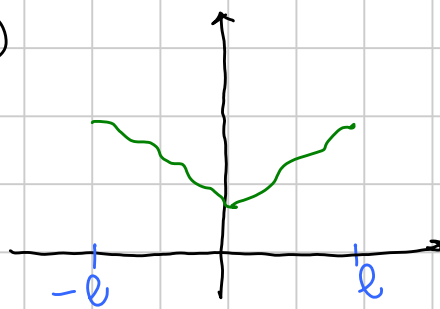
$$\hat{f}(x) = \underbrace{a_0 + \sum a_k \cos\left(2 \frac{\pi}{2l} kx\right)}_{=0 \text{ perché è dispari}} + \underbrace{\sum b_k \sin\left(2 \frac{\pi}{2l} kx\right)}_{\text{sviluppo di tipo (D-D)}}$$

Conclusione. Lo sviluppo di tipo (D-D) di $f(x)$ è lo sviluppo di tipo (P) di $\hat{f}(x)$.

Quindi, se $f: [0, l]$ è C^1 , allora l'estesa $\hat{f}$ è C^1 a tratti e la serie di F (D-D) di f , che poi è la serie (P) di $\hat{f}$ converge

- puntualmente a $f(x)$ in $(0, l)$, cioè dove $\hat{f}$ è continua
- " " 0 in $\{0, l\}$ (semisomma dei limiti)
- uniformemente a $f(x)$ in $[\varepsilon, l-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

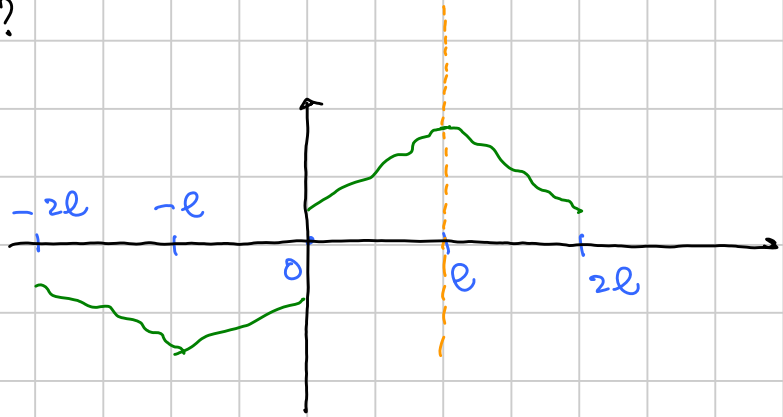
Analogamente, se voglio sviluppare (N-N) estendo prima per parità e poi per $2l$ -periodicità ottenendo una $\hat{f}(x)$ che sviluppo di tipo (P). Nello sviluppo ci saranno solo la costante ed i termini



$$\cos\left(2 \frac{\pi}{2l} kx\right) \quad \text{che è lo sviluppo di tipo (N-N)}$$

Ora se f è C^1 in $[0, l]$, l'estensione $\hat{f}$ è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ e continua, quindi la convergenza è unif. per il teo. 2.
— o — o —

Cosa succede nel (D-N)?



① Estendo per "parità" rispetto a l fino a $2l$

② " " disparità a $[-2l, 0]$

③ Estendo per $4l$ -periodicità ad $\mathbb{R}$

④ Sviluppo di tipo (P) su $[0, 4l]$.

I coseni e la costante non ci sono per disparità

Si può dimostrare sfruttando la "parità" che non ci sono nemmeno i seni con k pari.

Restano solo i seni con k dispari che sono quelli che compaiono nel (D-N).

— o — o —