

SERIE DI FOURIER

Teorema spettrale in spazi di Hilbert Sia $f: H \rightarrow H$ lineare.

Supponiamo che

(i) f è simmetrica ($\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ per ogni x, y in H)

(ii) f è compatta (se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$)

Allora (se H è separabile) esiste una base Hilbertiana di H fatta da autovettori di f , quindi detta $\{e_n\}$ la base

$$f(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$.

Esempio classico $H = L^2(a, b)$

f = "doppia primitiva con condizioni al bordo"

Data $f(x)$, cerco una funzione $\hat{F}(x)$ tale che $\hat{F}''(x) = f(x)$ in (a, b) + opportune condizioni al bordo.

Si verifica che

$$f(x) \longrightarrow \hat{F}(x) + \text{BC} \rightarrow \text{boundary conditions}$$

- è una funzione lineare (se e solo se le condi. al bordo siano 0 o comunque condizioni stabili per somma e prodotto per costante)
- è simmetrica (segue da integrazione per parti + BC)
- è compatta

Boundary conditions

① Cauchy

$$\hat{F}(a) = \hat{F}'(a) = 0$$

→ NO SIMMETRIA

② D-D

$$\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$$

③ N-N

$$\hat{F}'(a) = \hat{F}'(b) = 0$$

④ D-N (N-D)

$$\hat{F}(a) = \hat{F}'(b) = 0 \quad (\text{o viceversa})$$

⑤ P (periodica)

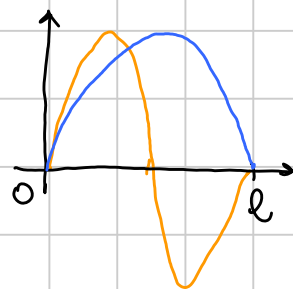
$$\hat{F}(a) = \hat{F}(b), \quad \hat{F}'(a) = \hat{F}'(b)$$

① (D-D) produce un' applicazione simmetrica ben definita.

Gli autovettori, posto $(a,b) = (0,l)$ sono

$$u_k(x) = \sin\left(k \frac{\pi}{l} x\right)$$

↑
base ortogonale di $L^2((0,l))$



Gli autovalori corrispondenti sono

$$u_k''(x) = -k^2 \frac{\pi^2}{l^2} u_k(x), \text{ cioè } u_k(x) = -\frac{l^2}{\pi^2} \frac{1}{k^2} u_k''(x)$$

$$Au = \lambda u \quad \begin{matrix} \uparrow \text{autoval} \\ \downarrow 0 \end{matrix}$$

② (D-N) Come sempre $(a,b) = (0,l)$,

Dato una funzione $f(x)$ cerco $\hat{F}(x)$ t.c. $\hat{F}''(x) = f(x)$
e vincoli

$$\hat{F}(a) = 0 \quad \hat{F}'(b) = 0$$

Chiamo $G(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$\hat{G}(x) = \int_0^x G(t) dt$$

Allora $\hat{G}(x)$ è doppia primitiva di $f(x)$ con condizioni di Cauchy.
Ora

$$\hat{F}(x) = \hat{G}(x) + c_1 x + c_2$$

e cerco c_1 e c_2 in modo da soddisfare le condizioni

$$0 = \hat{F}(0) = \hat{G}(0) + c_2 \quad \rightsquigarrow \quad c_2 = 0$$

$$0 = \hat{F}'(l) = \hat{G}'(l) + c_1 \quad \rightsquigarrow \quad c_1 = -\hat{G}'(l) = -G(l) = -\int_0^l f(x) dx$$

$\Rightarrow$ Le condizioni al bordo individuano univocamente $\hat{F}(x)$

Troviamo la base di autovettori, cioè risolviamo

$$\hat{F}(x) = \lambda f(x)$$

Derivo due volte a dx e sx (per BOOTSTRAP $f(x)$ è in realtà C^∞) e ottengo

$$\hat{F}''(x) = \lambda f''(x), \text{ cioè } f(x) = \lambda f''(x), \text{ cioè}$$

$f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$. Da qui ci sono 3 casi a seconda del segno di λ

• Caso $\lambda > 0$: soluz. sono $f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}$ $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$f'(l) = 0 \Leftrightarrow \omega a e^{\omega l} - \omega b e^{-\omega l} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega e^{\omega l} & -\omega e^{-\omega l} \end{pmatrix}$$

Det $\neq 0$

$\Rightarrow$ l'unica soluzione è $a = b = 0 \Rightarrow$ nessun autovettore

• Caso $\lambda = 0$: soluz. sono $f(x) = ax + b$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$f'(l) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$\Rightarrow$ NO autovettori

• Caso $\lambda < 0$: $f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$ $\omega^2 = -\frac{1}{\lambda}$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$f'(l) = 0 \Leftrightarrow a \omega \cos(\omega l) = 0$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \omega l = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Quindi gli autovettori sono

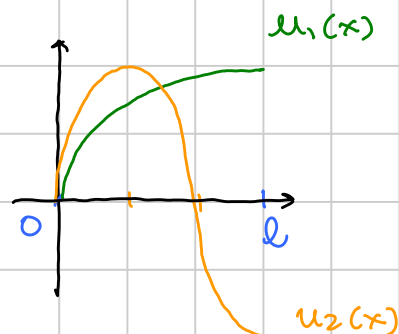
se $l = \pi$

$$u_k(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi}{l}k\right)x\right)$$

$$u_k(x) = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_k = -\frac{1}{\omega_k^2} = -\frac{Q^2}{\pi^2} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow 0$$



— 0 — 0 —

③ (N-N) Come prima $\hat{F}(x) = \hat{G}(x) + c_1 x + c_2$

$$\hat{F}'(0) = 0 \Leftrightarrow \hat{G}'(0) + c_1 = 0$$

$$\hat{F}'(l) = 0 \Leftrightarrow \hat{G}'(l) + c_1 = 0$$

Ora non posso determinare univocamente c_2 e posso determinare c_1 se e solo se

$$\hat{G}'(0) = \hat{G}'(l), \text{ cioè se e solo se } \int_0^l f(x) dx = 0$$

Allora si considera lo spazio

$$L^2_{\boxed{m=0}}((0,l)) = \{ f \in L^2((0,l)) : \int_0^l f(x) dx = 0 \}$$

↓ media nulla

Ora la doppia primitiva definisce una funzione lineare

$$L^2_{m=0}((0,l)) \rightarrow \underbrace{L^2_{m=0}((0,l))}_{\substack{\text{permette di determinare} \\ c_2 \text{ in modo unico}}}$$

In questo spazio funziona il te. spettrale.

Chi sono gli autovettori? Devo risolvere

$$f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \quad \text{con B.C. + media nulla}$$

- Casi $\lambda > 0$ e $\lambda = 0$ non producono nulla (verifica)
- Caso $\lambda < 0 \leadsto$

$$f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x) \quad \omega^2 = -\frac{1}{\lambda}$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \omega a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f'(l) = 0 \Leftrightarrow -\omega b \underbrace{\sin(\omega l)}_{\substack{= \\ 0}} = 0$$

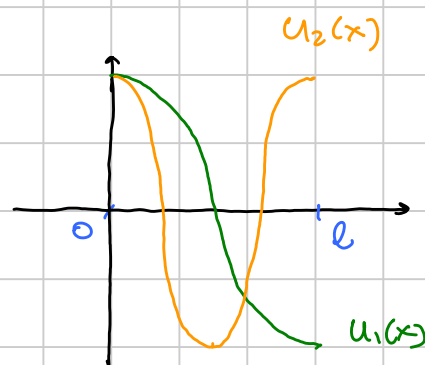
$$\text{quindi } \omega l = k\pi, \text{ cioè } \omega = \frac{\pi}{l} k$$

Gli autovettori sono

$$u_k(x) = \cos\left(\frac{\pi}{l} k x\right)$$

NOTA BENE! HANNO
MEDIA NULLA

$$u_k(x) = \cos(kx)$$



④ (P) Come prima $\hat{F}(x) = \dots$

$$\hat{F}(0) = \hat{F}(l) \Leftrightarrow \hat{G}(0) + \cancel{c_2} = \hat{G}(l) + c_1 l + \cancel{c_2} \leadsto \text{trovo } c_1$$

$$\hat{F}'(0) = \hat{F}'(l) \Leftrightarrow \hat{G}'(0) + \cancel{c_1} = \hat{G}'(l) + \cancel{c_1}$$

Quindi deve essere vero che $\int_0^l f(x) dx = 0$.

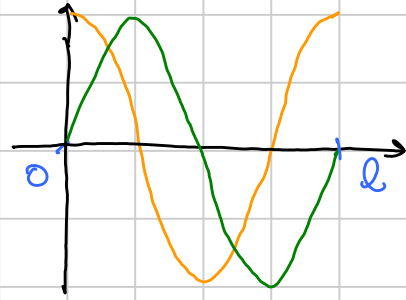
Anche in questo caso funziona tutto pensando

$$L^2_{m=0}((0, l)) \rightarrow L^2_{m=0}((0, l))$$

Gli autovettori si calcolano come sempre e si ottengono sia seni sia coseni, ma occhio al periodo!

$$u_k(x) = \sin\left(2k \frac{\pi}{\ell} x\right)$$

$$u_k(x) = \cos\left(2k \frac{\pi}{\ell} x\right)$$



Per ogni autovalore $\lambda = -\frac{\ell^2}{4\pi^2} \frac{1}{k^2}$ ci sono due autovettori, ^{lin. indep.}

quindi autospazio di dimensione 2.

Oss. Se so sviluppare le funzioni a media nulla, le so sviluppare tutte quante (basta aggiungere una costante).