

Analogo del teorema spettrale in spazi di HilbertCaso classico in dimensione finita : un'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

si dice simmetrica se

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

cioè f "migra nei prodotti scalari"

Fatto 1 Se A è la matrice associata ad f rispetto ad una base ortonormale, allora A è simmetrica.

Teorema spettrale Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simmetrica, esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di f .
Tale base la posso scegliere ortonormale.
Detto altrimenti, esistono numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ed esistono vettori $v_1, \dots, v_n$ t.c.

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

Negli spazi di Hilbert la def. di appl. simmetrica è la stessa

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x \in H, \forall y \in H$$

↑ ↑
prod. scalare in H

$$f: H \rightarrow H \text{ lineare.}$$

Def. Una funzione $f: H \rightarrow H$ lineare si dice COMPATTA se

$$\boxed{v_m \xrightarrow{\text{debole}} v_\infty \quad \Rightarrow \quad f(v_m) \xrightarrow{\text{forte}} f(v_\infty)}$$

Teorema spettrale Sia $f: H \rightarrow H$ un' applicazione lineare simmetrica e compatta.

Allora esiste una base Hilbertiana costituita da autovettori di f .

L'esempio Consideriamo $H = L^2(a,b)$. Consideriamo l'applicazione "doppia primitiva"

$$f(x) \rightsquigarrow F(x) = \int f(x) \rightsquigarrow \hat{F}(x) = \int F(x)$$

Visto che le primitive non sono uniche, devo fare delle scelte.

Dato $f(x)$ e data una "doppia primitiva" $\hat{F}(x)$, l'insieme di tutte le "doppie primitive" è del tipo

$$\boxed{\hat{F}(x) + c_1 x + c_2}$$

Per calcolare c_1 e c_2 impongo delle condizioni:

$$(D-D) \quad \hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$$

$$(N-N) \quad \hat{F}'(a) = \hat{F}'(b) = 0$$

$$(D-N) \quad \text{ o } (N-D)$$

$$(Cauchy) \quad \hat{F}(a) = \hat{F}'(a) = 0 \quad \text{ o stessa cosa in } b$$

$$(P) \quad \hat{F}(a) = \hat{F}(b) \quad \text{ e } \quad \hat{F}'(a) = \hat{F}'(b) \quad (\text{periodico})$$

Domande: $\rightarrow$ con queste scelte, otteniamo una doppia prim. ben definita? (cioè calcoliamo c_1 e c_2)
 $\rightarrow$ otteniamo un'appl. lin. simmetrica?
 $\rightarrow$ " " " " compatta?

Facciamo il caso (D-D)

$$\hat{F}(x) + c_1 x + c_2$$

Impongo

$$\hat{F}(a) + c_1 a + c_2 = 0$$

$$\hat{F}(b) + c_1 b + c_2 = 0$$

Se $a \neq b$, posso trovare c_1 e c_2 in modo unico

È quasi ovvio che è lineare (perché al bordo ho imposto 0)

È simmetrica? $\langle \hat{F}, g \rangle \stackrel{?}{=} \langle f, \hat{G} \rangle$

$$\underbrace{\int_a^b \hat{F}(x) g(x) dx}_{\langle \hat{F}, g \rangle} = \left[\underbrace{\hat{F}(b)}_0 G(b) - \underbrace{\hat{F}(a)}_0 G(a) \right] - \int_a^b F(x) G(x)$$

$$\langle f, \hat{G} \rangle = \int_a^b f(x) \hat{G}(x) dx = F(b) \underbrace{\hat{G}(b)}_0 - F(a) \underbrace{\hat{G}(a)}_0 - \int_a^b F(x) G(x)$$

Sì, è simmetrica!

È compatta? Sì, perché se $f_n \rightarrow f_\infty$, allora

$F_n \rightarrow F_\infty$ uniformemente (perché ci sia un controllo al bordo), quindi a maggior ragione

$\hat{F}_n \rightarrow \hat{F}_\infty$ uniformemente, e quindi a maggior ragione L^2 forte

Oss. Fare una sola primitiva è un' applic. compatta, ma non simmetrica,

Per il teorema spettrale esiste una base di $L^2(a,b)$ costituita da autovettori della doppia primitiva. Li trovo

$$\hat{F}(x) = \lambda f(x) \quad \text{Dando a dx e sx : } \hat{F}''(x) = \lambda f''(x) \\ f(x) = \lambda f''(x)$$

cioè $f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$

la regolarità per fare il conto arriva dal bootstrap:

$$f \in L^2 \Rightarrow F \in C^0 \Rightarrow \hat{F} \in C^1 \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda} \hat{F} \in C^1 \Rightarrow \hat{F} \in C^3 \dots$$

Ci sono 2 casi: ci mettiamo per semplicità in $(a,b) = (0,l)$

• $\lambda > 0$: $f'' = \frac{1}{\lambda} f \rightsquigarrow f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Impongo le cond. al bordo $\rightsquigarrow$

su $\hat{F}$ o f è
lo stesso

$$a + b = 0 \quad x=0$$

$$a e^{\omega l} + b e^{-\omega l} = 0 \quad x=l$$

$$\Rightarrow a = b = 0$$

$\Rightarrow$ funzione nulla $\Rightarrow$ non vale

• $\lambda < 0$: $f'' = -\frac{1}{\mu} f \rightsquigarrow f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$

Cond. al bordo: $b = 0$

$$x=0$$

$$a \sin(\omega l) = 0 \quad x=l$$

Se $\sin(\omega l) \neq 0$ non va bene perché viene $a = 0$.

Se $\sin(\omega l) = 0$, allora abbiamo autovettori non nulli del tipo

$$f(x) = a \sin(\omega x)$$

$$\text{Ora } \sin(\omega l) = 0 \Leftrightarrow \omega l = n\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{n\pi}{l} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}$$

Quindi:

① Gli autovalori della "doppia primitiva (D-D)" sono $\lambda = -\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}$

② I corrispondenti autovettori sono $a \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$

Grazie al teorema spettrale sappiamo che $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\}$ sono una base ortogonale di $L^2((0, l))$

↳ dividendo si ortonormalizza

Conseguenze

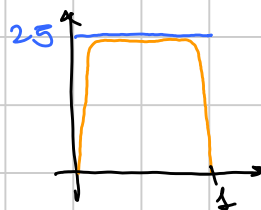
①
$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = 0 \quad \text{se } n \neq m$$

volendo si scrive come $\cos(\) \pm \cos(\)$ e integrato su un periodo viene $= 0$

② Ogni $f \in L^2((0, l))$ si scrive in modo unico come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

La serie converge solo in L^2 , quindi non possiamo avere informazioni a x fisso.



Chi è c_n ? Ovviamente

$$c_n = \frac{\langle f, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle}$$

↑
el. della base

e

$$\int_0^l f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$