

Esercizio

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 (\dot{u}^2 + \cos u) dx}_{F(u)} : u \in C^1([0,1]) \right. \\ \left. u(0) = 0, u(1) = 3 \right\}$$

Formulazione debole : considero $F(u)$ per $u \in H^1(a,b)$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 3$,
 posso parlare dei valori in 0 e 1 perché u è continua

Compattezza : considero una qualunque succ. u_n t.c.

$$F(u_n) \rightarrow \sup F(u) \quad (\text{succ. minimizz.})$$

Allora so che $F(u_n) \leq M$, quindi

$$\int_0^1 \{ [\dot{u}_n(x)]^2 + \cos(u_n(x)) \} dx \leq M \quad (= \sup + 1, \text{ vedendo})$$

quindi
$$\int_0^1 \dot{u}_n^2(x) dx \leq M + 1$$

quindi
$$\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M + 1$$

Da qui ottengo che

- $\dot{u}_n$ è limitata in L^2
- u_n sono equi- $\frac{1}{2}$ Hölder in $(0,1)$
- u_n sono equilimitate in $(0,1)$ (per via del pto precedente e del fatto che $u_n(0) = 0$)

Quindi a meno di s.succ.

$$\begin{array}{ll} \dot{u}_n \longrightarrow v_{\infty} & (\text{compattezza debole delle palle}) \\ u_n \longrightarrow u_{\infty} & \text{uniformemente (Ascoli-Arzelà)} \end{array}$$

Come sempre $v_\infty = \dot{u}_\infty$

$$\left[\int_0^1 \dot{u}_n(x) \varphi(x) dx = - \int_0^1 u_n(x) \dot{\varphi}(x) dx \quad \forall \varphi \in C^1 \text{ nulla al bordo} \right]$$
$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$
$$\int_0^1 v_\infty(x) \varphi(x) dx = - \int_0^1 u_\infty(x) \dot{\varphi}(x) dx$$

da cui $v_\infty = \dot{u}_\infty$ per defniz. di derivata debole.]

Semicontinuità Vorrei dim. che $\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$

Qui interviengono i tes. di passaggio al limite:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \dot{u}_n^2(x) dx \geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2(x) dx$$

$\uparrow$
semicontinuità della norma
(basta che sia $\varphi(u_n)$ con φ convessa)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(u_n(x)) dx = \int_0^1 \cos(u_\infty(x)) dx$$

$\uparrow$
conv. uniforme
(basta che sia $\varphi(u_n)$ con φ continua)

Sommando le 2 si ottiene la tesi.

Regolarità Si cerca l'equazione di Eulero. Sia u_∞ un pto di minimo in H^1 . Allora considero le perturbazioni $u_\infty + tv$ con $v \in H^1$ nulla al bordo (perché ho le cond. di Dirichlet sul pbm. iniziale). Per semplicità pongo $u = u_\infty$

$$\frac{1}{t} [F(u+tv) - F(u)] = \frac{1}{t} \int_0^1 (\dot{u} + t\dot{v})^2 - \dot{u}^2 + \cos(u+tv) - \cos u$$
$$= \int_0^1 2\dot{u}\dot{v} + t\dot{v}^2 + \frac{\cos(u+tv) - \cos u}{t}$$

Facendo il limite per $t \rightarrow 0$ si ottiene

$$\int_0^1 (2 \ddot{u} \dot{v} - \sin u \cdot v) dx = 0$$

la forma dell'eq. di Eulero

Risando e un limite alle $v \in C^1$ nulle al bordo

$$\int_0^1 \ddot{u} \dot{v} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \sin u \cdot v$$

$g \quad \varphi' \qquad \qquad \varphi \quad \varphi \rightsquigarrow \varphi \dot{=} -g'$

Questo mi dice che $-\frac{1}{2} \sin u$ è la derivata debole di $\ddot{u}$, quindi è ancora vero che

$$\ddot{u} = -\frac{1}{2} \sin u$$

↑
derivata debole di $\ddot{u}$, cioè la derivata debole seconda di u

Morale: l'eq. di Eulero è sempre la stessa, solo che la derivata seconda va intesa in senso debole.

BOOTSTRAP Si guadagna la regolarità un passo per volta:

→ $u \in C^0$ perché le funzioni H^1 sono C^0

→ $\ddot{u} = -\frac{1}{2} \sin u \in C^0$, ma allora $u \in C^2$

→ $\ddot{u} = -\frac{1}{2} \sin u \in C^2$, ma allora $u \in C^4$

proseguendo in questo modo si ottiene $u \in C^\infty$.

Conclusione Sappiamo che

① il minimo esiste e tutti i p.ti di minimo sono C^∞

② i p.ti di min. sono soluzioni classiche dell'eq. di Eulero

Non sappiamo se il p.to di min. o le sol. dell'eq. sono uniche.

Abbiamo usato questo fatto: se $u \in C^0$ e $\ddot{u}$ (debole) $\in C^0$, allora $u \in C^1$ e la derivata è quello che deve essere

[Dim. $\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C^1$ nulla al bordo

da questo si ottiene che $u(x)$ è l'integrale della derivata

$$u(x) = \int_a^x v(t) dt$$

e quindi se $v \in C^0$ per forza $u \in C^1$.]

Oss. Le funzioni H^1 sono l'integrale della propria derivata.

Consideriamo le approssimanti

$$C^1 \ni u_n \rightarrow u$$

$$\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}$$

Per la approx è vero

$$u_n(x) = \int_a^x \dot{u}_n(t) dt$$

$\downarrow$
 $u(x)$
 perchè è pure unif $\int_a^x \dot{u}(t) dt$ perchè lo posso vedere
 $\langle \dot{u}_n, 1|_{[a,x]} \rangle$
 (basterebbe pure la debole)

— o — o —

REVERSE ENGINEERING Risolvere l'equazione

$$\begin{cases} \ddot{u} = -e^u \\ u(0) = u(\pi) = 2015 \end{cases}$$

Domande: ① esiste la soluzione?

② è unica?

③ che regolarità ha?

Passo dal funzionale:

$$F(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + e^u \right) dx$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^b (\varphi(\dot{u}) + \psi(u)) \rightsquigarrow \int_a^b (\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v) \\ &\rightsquigarrow \int_a^b -\varphi''(\dot{u}) \ddot{u} v + \psi'(u) v \\ &\rightsquigarrow \varphi''(\dot{u}) \ddot{u} = \psi'(u) \end{aligned}$$

Il metodo diretto è quasi gratis

→ Formulazione in H^1

→ Compattità: da $F(u_n)$ limitato ottengo la limitatezza di $\|\dot{u}_n\|_{L^2}$, quindi come prima

$$\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

→ Semicontinuità: gratis

→ regolarità: gratis via bootstrap

Questo mostra esistenza + regolarità.

Per l'unicità servono 2 ingredienti

- ① Mostrare che tutte le soluzioni di Eulero sono minimi
- ② Mostrare che il pto di min. è unico

Basta fare $F(u+w)$ dove u è una soluzione di Eulero e mostrare che

$$F(u+w) \geq F(u)$$

con uguaglianza solo se $w \equiv 0$. Questo riesce grazie alla convessità, come si faceva nel metodo indiretto.

$$F(u+w) = \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{u} + \dot{w})^2 + e^{u+w} = e^u e^w \geq e^u (1+w)$$

$$\geq \int_0^T \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2}_{\geq 0} + 2 \dot{u} \dot{w} + \underbrace{\dot{w}^2}_{\geq 0} + \underbrace{e^u}_{\geq 0} + e^u w$$

$$= \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} \dot{u}^2 + e^u}_{F(u)} + \underbrace{\int_0^T \dot{u} \dot{w} + e^u w}_{=0 \text{ perchè è l'eq. di Eulero}}$$

L'uguale vale $\Leftrightarrow w=0$.