

Metodo diretto del calcolo delle variazioni

Consideriamo funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b [\varphi(u) + \psi(u, x)] dx$$

Voglio dim. l'esistenza del minimo

- ROAD MAP**
- ① Formulazione debole $\leadsto$ derivate deboli, spazi H^1
 - ② Compattezza: data una succ. in b.c.

$$F(u_n) \rightarrow \inf F(u) \quad (\text{succ. minimizzante})$$

Sperare di riuscire a dim. che

$$\begin{array}{l} u_n \rightarrow u_\infty \\ i_n \rightarrow v_\infty \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_n \\ i_n \end{array}} \right\} \text{a meno di sottosucc.}$$

(A quel p.to quasi gratis $v_\infty = i_\infty$)

- ③ Semicontinuità: se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $i_n \rightarrow i_\infty$ allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$$

Fatti ①, ② e ③ è gratis che $F(u_\infty)$ è il minimo, quindi u_∞ è un p.to di minimo

Dim.

$$F(u_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \inf F(u)$$

per come è stata scelta u_n

④ Regolarità: dimostrare che in realtà $u_\infty \in C^1$
 per cui $\dot{u}_\infty$ esiste in senso classico ↑
o meglio
 — o — o —

Il p.to 1 usa gli spazi di Sobolev (in genere H^1)

Per il p.to 2 servono dei teoremi di compattità del tipo

" $\{u_n\}$ Limitata in L^2 + qualcosa che impedisca alle u_n
 di scappare $\Rightarrow$ $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. } a meno di
 $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debolmente sottosucc. "

Teorema Sia $u \in H^1((a,b))$. Allora u è $\frac{1}{2}$ -Hölder, cioè u è
 continua ed esiste una costante H tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq H |x - y|^{1/2} \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\quad \quad \quad \forall y \in (a,b)$$

La costante H dipende dalla norma di $|u|$ in L^2 .

Dim. Cosa vuol dire che $u \in H^1((a,b))$? Uso la definizione H .
 Vuol dire che esiste una succ. di funzioni $u_n \in C^1((a,b))$
 tali che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^2$$

$$\dot{u}_n \rightarrow \dot{u} \quad \text{in } L^2.$$

Per ogni x e y in (a,b) si ha

$$u_n(x) - u_n(y) = \int_y^x \dot{u}_n(s) ds$$

$$= \int_a^x \dot{u}_n(s) \cdot \underbrace{1_{[y,x]}}_{\substack{\text{funzione che vale 1 in } [y,x] \\ \text{e 0 altrove}}} ds$$

Quindi per Cauchy-Schwarz si ottiene

$$|u_n(x) - u_n(y)| = |\langle \dot{u}_n, 1 \rangle|$$

$$\leq |\dot{u}_n| \cdot |1|$$

$$= \underbrace{\left(\int_a^b \dot{u}_n^2(s) ds \right)^{1/2}}_H \cdot (|x-y|)^{1/2}$$

Se potessi passare al limite per $n \rightarrow \infty$ otterrei

$$|u_\infty(x) - u_\infty(y)| \leq |\dot{u}_\infty| \cdot |x-y|^{1/2}$$

Posso passare al limite?

Sapendo che $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ si ha $|\dot{u}_n| \rightarrow |\dot{u}_\infty|$

Per passare al limite in $u_n(x)$ e $u_n(y)$ dobbiamo usare il
teo. di Ascoli - Arzelà

— o — o —

Def. Sia $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.

Si dice che le u_n sono

- equilimitate se esiste M t.c.

$$|u_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↑ lo stesso per ogni n

- equicontinue se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in [a, b]$ esiste un $\delta > 0$ tale che

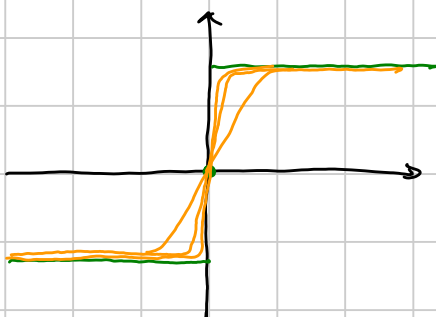
$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \varepsilon \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a, b] \\ \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

(L'equi sta nel fatto che δ non dipende da n)

Teorema (Ascoli - Arzelà) Sia $u_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni equilimitate e equicontinue.
Allora esiste una sottosuccessione convergente uniformemente, cioè esiste una succ. di interi n_k strett. cresc. ed esiste $u_\infty : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u_\infty(x) \quad \text{unif. in } [a,b].$$

Oss. L'equilimitatezza impedisce di scappare sopra / sotto
L'equicontinuità impedisce fenomeni come questo:



Oss. Una condizione che implica l'equicontinuità è la equilipschitzianità oppure equihölderianità.

Per esempio, se

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq H \cdot |x-y|^{1/2} \quad \begin{array}{l} \forall x \in (a,b) \\ \forall y \in (a,b) \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$\uparrow$
 stessa H
 per ogni $n \in \mathbb{N}$

allora le $u_n(x)$ sono equicontinue.

[Se voglio a sx che sia $\leq \varepsilon$ basta prendere $H\sqrt{\delta} \leq \varepsilon$,
quindi $\delta \leq \frac{\varepsilon^2}{H^2}$]

In realtà questo dimostra pure che sono equi unif. continue, perché δ non dipende né da n né da x .

Tornando alla dimostrazione iniziale...

$u_n(x)$ sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder e dunque equicontinue.

Resta da dim. che sono equilimitate. Noi sappiamo che $u_n \rightarrow u$ in L^2 , quindi $\|u_n\|$ è limitata (norma L^2), cioè

$$\underbrace{\int_a^b u_n^2(x) dx}_{\leq M}$$

$$= u_n^2(x_n) \cdot (b-a)$$

↑
teorema della media integrale

quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un pto x_n tale che

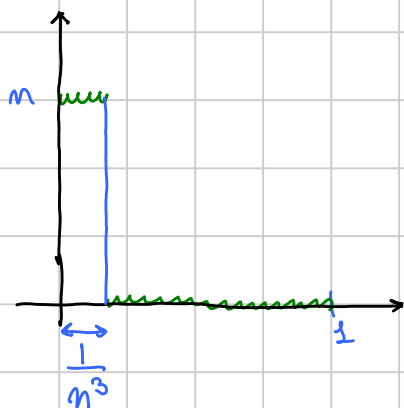
$$u_n^2(x_n) \leq \frac{M}{(b-a)}$$

Ma allora per ogni $x \in [a, b]$ si avrà

$$u_n(x_n) - H|x - x_n|^{1/2} \leq u_n(x) \leq \underbrace{u_n(x_n)}_{\text{limitato}} + \underbrace{H|x - x_n|^{1/2}}_{\leq H(b-a)^{1/2}}$$

— 0 — 0 —

Oss. Se anche sapessi che $u_n \rightarrow 0$ in L^2 non potrei dedurre che le u_n sono equilimitate !!!



$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \int_0^1 u_n^2(x) dx \\ &= \int_0^{1/n^3} n^2 dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Idea: sapere che le norme in L^2 sono limitate non dà informazioni puntuali sulle u_n .

Concludendo la dim. iniziale: se un solo equilibrio + equicontinuo, quindi ammettono una s.succ.

$$u_{m_k}(x) \rightarrow \underline{u_\infty(x)} \quad \text{uniformemente}$$

$\uparrow$ continua perché limite unif. di funzioni continue

Ma allora il limite L^2 è in realtà anche un limite uniforme ed è continuo,

— o — o —

Nella ROAD MAP, dal sapere che $F(u_n)$ è limitato si spera di poter dedurre che, a meno di s.succ.,

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u_\infty && \text{unif} \\ i_n &\rightarrow i_\infty && \text{debolmente} \end{aligned}$$

usando gli strumenti appena descritti,

— o — o —