

Esempio motivazionale

$$\min \left\{ \int_0^1 (u^2 + \arctan^2 u) dx : u(0)=0, u(1)=7 \right\}$$

$$u \in C^1((0,1))$$

Voglio dimostrare che il minimo esiste. Metodo indiretto porta ad un'eq. di Eulero che non risolve esplicitamente, e poi mancherebbe la convessità per concludere.

Idea: estendere il problema in un ambiente più grande di C^1 ,
ad esempio $W^{1,2}((0,1)) = H^{1,2}((0,1)) = H^1((0,1))$
↑ ↑
 $H=W$ il "2" è sottinteso

L'estensione è ovvia: se $u \in H^1$, pongi semplicemente

$$F(u) = \int_0^1 (u^2 + \arctan^2 u) dx$$

↑
derivata
debole

Ovviamente esiste $\inf \{ F(u) : u \in H^1 \} = I$

Inoltre esiste una successione $\{u_n\} \subseteq H^1$ tale che

$$F(u_n) \rightarrow I \quad (\text{successione minimizzante})$$

Speranza: ① u_n abbia, a meno di sottosuccessioni, un limite $u_\infty \in H$

② $F(u_\infty) = I$ (e questo dimostrerebbe che esiste il minimo)

③ $u_\infty \in C^1$ (e questo dimostrerebbe che esiste il minimo anche in C^1)

Cosa è facile dedurre?

FATTO 1 Se u_n è una successione minimizzante, allora

$$\int_0^1 |\dot{u}_n(x)|^2 dx \quad \text{è limitato}$$

Dim. Se u_n è succ. minimizzante, allora $F(u_n) \leq M$ per un'opportuna M , quindi

$$\int_0^1 |\dot{u}_n|^2 dx \leq F(u_n) \leq M$$

FATTO 2 Grazie al fatto 1, la succ. $\{\dot{u}_n\}$ è limitata in L^2 , quindi ammette una s.succ. convergente in L^2 , cioè

$$\dot{u}_{n_k} \longrightarrow v_\infty$$

Supponiamo ora di sapere che anche $u_{n_k} \longrightarrow u_\infty$, anzi supponiamo di sapere che

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{uniformemente.}$$

FATTO 3 Data per buona la supposizione, allora v_∞ è la derivata debole di u_∞

Dim.

$$\begin{array}{ccc} \int_0^1 u_{n_k} \varphi' = - \int_0^1 \dot{u}_{n_k} \varphi & & \text{(def. di deriv. debole)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_0^1 u_\infty \varphi' = - \int_0^1 v_\infty \varphi & & \text{(bastano 2 conv. deboli)} \end{array}$$

Cosa accade se passo al limite nei 2 termini del funzionale?

FATTO 4

$$\int_0^1 \arctan^2(u_n(x)) dx \rightarrow \int_0^1 \arctan^2(u_\infty(x)) dx$$

Dim. Segue dalla convergenza uniforme

FATTO 5

$\int_0^1 |\dot{u}_n(x)|^2 dx$ questo non passa al limite se ho solo convergenza debole, ma al limite può solo crollare!

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 |\dot{u}_n(x)|^2 dx}_{\|\dot{u}_n\|^2} \geq \underbrace{\int_0^1 |\dot{v}_\infty(x)|^2 dx}_{\|\dot{v}_\infty\|^2}$$

FATTO 4 + FATTO 5 $\liminf F(u_n) \geq F(u_\infty)$

Basta sommare

FATTO 6 $F(u_\infty) = I$, cioè u_∞ è un pto di minimo

Dim.

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \liminf F(u_n) \geq F(u_\infty) \geq I$$

$\uparrow$
I è l'inf

Quindi ci sono tutte uguaglianze.

— o — o —

Problema in generale

$$\int_a^b \varphi(u(x)) dx$$

Se so che $v_n(x) \rightarrow v_\infty(x)$, cosa posso dire di

$$\int_a^b \varphi(v_n(x)) dx$$

Risposta 1 Se $\varphi(x)$ è continua e $v_n(x) \rightarrow v_\infty(x)$ unif. in (a, b) , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(v_n(x)) dx = \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx$$

Idea della dim. Si tratta di dimostrare che anche

$$\varphi(v_n(x)) \rightarrow \varphi(v_\infty(x)) \quad \text{unif. in } (a, b)$$

Utilizzo operativo: serve per passare al limite nei pezzi dei funzionali "senza derivate".

Risposta 2 Se $\varphi(x)$ è convessa e $v_n(x) \rightarrow v_\infty(x)$ anche solo debolmente (ed è limitata), allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(v_n(x)) dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx$$

Utilizzo operativo: passare al limite nei pezzi di funzionale con la derivata.

Dim. Ricordiamo la disuguaglianza

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b \quad \text{per ogni } a \text{ e } b$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \varphi(v_n(x)) &= \varphi(\underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b + \underbrace{v_\infty(x)}_a) \\ &\geq \varphi(v_\infty(x)) + \varphi'(v_\infty(x)) (v_n(x) - v_\infty(x)) \end{aligned}$$

$$\int_a^b \varphi(v_n(x)) dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x)) dx + \underbrace{\langle \varphi'(v_\infty), v_n - v_\infty \rangle}_{\downarrow \text{ per conv. debole}}$$

Passando al liminf si ha Q.E.D.,

Teorema di passaggio al limite funzione e derivata

Caso classico: f_n funzioni C^1
 $f_n' \rightarrow g_\infty$ uniformemente
esiste un pto in cui le f_n tendono a q.c.

Tesi: $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente e $\underbrace{f_\infty'}_{f_\infty \in C^1} = g_\infty$.

Teorema Sobolev: f_n funzioni H^1
 $f_n' \rightarrow g_\infty$ (debole)
esiste un pto in cui f_n tendono a q.c.

Tesi: $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente. Inoltre $f_\infty \in H^1$ e $f_\infty' = g_\infty$.

Teorema (regolarità delle funzioni H^1).

Se $f \in H^1((a,b))$, allora è ancora vero che $f \in C^0((a,b))$
ed è l'integrale della sua derivata, cioè

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x) dx$$

Conseguenza Posso parlare del valore di $f(x)$ in un pto perché
prendo per $f(x)$ la sua versione continua.
Non posso parlare di $f'(x)$ in un pto.
— o — o —