

Spazio L^2

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme (pensiamo ai casi $A = \mathbb{R}$, oppure $A = (a, b)$, oppure $A = (a, +\infty)$, ma tutto funziona anche per $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

Def. Si definisce $L^2(A)$ come l'insieme delle funzioni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\int_A f^2(x) dx < +\infty$$

Analogamente posso definire $L^p(A)$ imponendo $\int_A |f(x)|^p dx < +\infty$

Teorema misterioso

- ① $L^2(A)$ è uno spazio vettoriale
- ② Per ogni f e g in $L^2(A)$ posso definire

$$\langle f, g \rangle = \int_A f(x) \cdot g(x) dx$$

e questo è un prodotto scalare definito positivo

- ③ $L^2(A)$ è un Hilbert separabile rispetto a questo prodotto.

Oss. La norma associata sarà: $\|f\|^2 = \int_A |f(x)|^2 dx$

Dim.

- ① Il prodotto per una costante è immediato.
Per la somma uso che

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Usandola con $f(x)$ e $g(x)$ ottengo

$$(f(x) + g(x))^2 \leq 2f^2(x) + 2g^2(x)$$

Se $a dx$ ha 2 cose integrabili, allora anche $a x$ è integrabile.

② $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (stesso motivo di prima) quindi

$$\int_A |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_A [f^2(x) + g^2(x)] dx$$

Quindi se f e $g \in L^2(A)$ l'integrale $a x$ converge.
Le proprietà del prodotto scalare sono ovvie

③ Completezza e separabilità sono la parte misteriosa.

Derivata debole

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$

Sia $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$, cioè C^1 e nulla al di fuori di un intervallo

Allora si ha



$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx$$

Dim. L'integrale su $\mathbb{R}$ è in realtà un integrale su un intervallo $[A, B]$ che contiene la zona in cui $\varphi \neq 0$.
A quel punto segue da int. per parti osservando che φ è nulla al bordo.

— o — o —

Def. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dico che $g \in L^2(\mathbb{R})$ è la derivata debole di f se

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Detto brutalmente: $g(x)$ "fa le veci" di $f'(x)$ nella formula di integrazione per parti.

Piccola generalizzazione: Se invece di $\mathbb{R}$ prendo (a,b) , allora la relazione diventa

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]) \text{ nulla al bordo } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Esempio classico $f(x) = |x|$ ha derivata debole in ogni intervallo (a,b) e la derivata è

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Dim.

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 |x| \varphi'(x) dx &= - \int_{-4}^0 x \varphi'(x) dx + \int_0^4 x \varphi'(x) dx \\ &= - [x \varphi(x)]_{-4}^0 + \int_{-4}^0 \varphi(x) dx \\ &= + [x \varphi(x)]_0^4 - \int_0^4 \varphi(x) dx \\ &= - \int_{-4}^4 g(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Esercizio Prova con $f(x) = |x|+1$ e vedere cosa succede al termine di bordo.

Spazi di Sobolev

→ Approccio W

→ Approccio H

Def. W

Diciamo che $f \in W^{1,2}(A)$ se $f \in L^2(A)$ ed ammette una derivata debole $g \in L^2(A)$.

$W^{1,2}(A)$
↑
numero di derivate
↑
esponente in L^2

$W^{k,p}(A)$ si definisce analogamente.

Esempio $f(x) = |x| \in W^{1,2}(A)$ per ogni intervallo A .

Def. H

Diciamo che $f \in H^{1,2}(A)$ se $f \in L^2(A)$ ed esiste una successione di funzioni $f_n \in C^1(A)$ b.c.

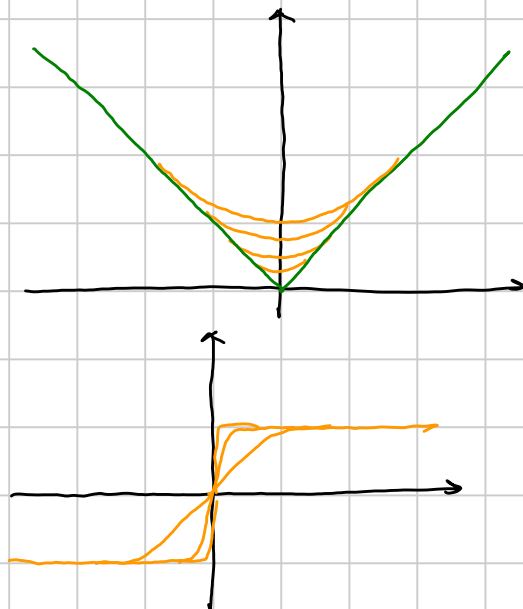
funzioni vere → $f_n(x) \rightarrow f(x)$ in L^2 $\int_A |f_n - f|^2 \rightarrow 0$
derivate vere → $f'_n(x) \rightarrow g(x)$ in L^2 $\int_A |f'_n - g|^2 \rightarrow 0$
↑
qualunque

Brutalmente: $f \in H^{1,2}(A)$ se è approssimabile con funzioni C^1 in maniera tale che

$f_n \rightarrow f$
e le derivate f'_n tendono in L^2 a qualcosa

Esempio $f(x) = |x|$

Posso approssimarla "smussando l'angolo". È chiaro che $f_n \rightarrow f$ e le derivate f'_n tendono alla funzione g che vale $-1, 1$.



TEOREMA MISTERIOSO

$$H = W$$

(In particolare la g della definizione H è la stessa g della definizione W , cioè la derivata debole di f)

Oss. L'unicità della derivata debole segue dal Lemma DBR in versione L^2 .

Dim. che $H \subseteq W$

Voglio sostanzialmente dimostrare che la g della def. H è la derivata debole nel senso dell'integrazione per parti.

Ipotesi: $f_n \rightarrow f$ $f'_n \rightarrow g$ $f_n \in C^1$

Tesi: g è la derivata debole

$$\begin{array}{ccc} \int_A f_n(x) \varphi'(x) dx & = & - \int_A f'_n(x) \varphi(x) dx & \text{int. per parti classica} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \int_A f(x) \varphi'(x) dx & = & - \int_A g(x) \varphi(x) dx & \end{array}$$

Questo è equivalente a dire che g è la derivata debole di f .

Osservazione fondamentale Non ho usato le convergenze forti, ma solo quelle deboli !!!