

Spazio di Hilbert : spazio vettoriale, con prodotto scalare def positivo
 $\leadsto$ norma $\leadsto$ distanza che lo rende uno sp. metrico completo.

Base Hilbertiana : insieme di vettori $\{e_n\}$ ortonormali (insieme finito o numerabile) tale che ogni altro $v \in H$ si scrive nella forma

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle v, e_n \rangle}_{\substack{\uparrow \text{numeri} \\ \uparrow \text{le componenti di } v \text{ risp. alla base}}} e_n \quad \uparrow \text{vettori}$$

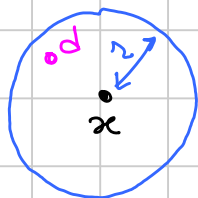
Prop. $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n}_{\substack{\uparrow \text{serie di} \\ \uparrow \text{vettori}}} \text{ converge in } H \iff \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2}_{\substack{\uparrow \text{serie di} \\ \uparrow \text{numeri}}} \text{ converge}$

Prop. $\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle^2$

Quando esiste una base Hilbertiana?

Def. Sia X uno spazio metrico, e sia $D \subseteq X$.
 Si dice che D è denso (in X) se

$$\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad \exists d \in D \quad \text{t.c.} \quad \text{dist}(x, d) < r$$



Esempi classici

- ① Ogni X è denso in se stesso
- ② $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$
- ③ $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$

Def. Uno spazio metrico X si dice separabile se esiste $D \subseteq X$ denso e numerabile.

Esempio $\mathbb{R}$ è separabile perchè contiene $\mathbb{Q}$, denso e numerabile.

TEOREMA MISTERIOSO Uno spazio di Hilbert H ammette una base Hilbertiana se e solo se H è separabile.

Idea della dimostrazione

Se esiste la base, allora è separabile: basta usare come denso i vettori che hanno solo un numero finito di componenti $\neq 0$ e le hanno tutte razionali.

Viceversa, supponiamo che esista un denso numerabile

$D = \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$. Allora costruisco e_n con questo algoritmo

① Prima ripulitura: $\rightarrow$ prendo d_1

$\rightarrow$ se $d_2 \in \text{Span}\{d_1\}$ lo butto, altrimenti lo prendo

$\vdots$

$\rightarrow$ se $d_{k+1} \in \text{Span}\{d_1, \dots, d_k\}$ lo butto, altrimenti lo tengo

② Faccio Gram-Schmidt su quelli rimasti ottenendo una base ortogonale

③ Ortormalizzo rendendoli di lunghezza 1.

— 0 — 0 —

Def. Sia $\{x_n\} \subseteq H$ una successione di vettori. Si dice che

• $x_n \rightarrow x_\infty$ FORTE se $\|x_\infty - x_n\| \rightarrow 0$

• $x_n \rightarrow x_\infty$ DEBOLE se $\forall w \in H$ si ha $\langle w, x_n \rangle \rightarrow \langle w, x_\infty \rangle$

Teorema Sia $\{x_n\} \subseteq H$ una successione limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|x_n\| \leq M$). Sia $x_\infty \in H$. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $x_n \rightarrow x_\infty$

(ii) $\langle x_n, e_i \rangle \rightarrow \langle x_\infty, e_i \rangle$ per ogni $i \in \mathbb{N}$

(le componenti di x_n risp. alla base convergono alle componenti di x_∞).

Esempio Se e_n è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightarrow 0$ ma non è vero che $e_n \rightarrow 0$ (non è di Cauchy).

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) è la definizione applicata con $w = e_i$

(ii) $\Rightarrow$ (i) non è banale e NON si fa così:

$$\langle x_n, w \rangle = \langle x_n, e_1 \rangle \langle w, e_1 \rangle + \langle x_n, e_2 \rangle \langle w, e_2 \rangle + \dots$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$\langle x_\infty, e_1 \rangle \langle w, e_1 \rangle + \langle x_\infty, e_2 \rangle \langle w, e_2 \rangle + \dots,$$

$$= \langle x_\infty, w \rangle \quad (\text{NON SI SCAMBIANO LIMITE E SERIE})$$

Serve una tecnica di approssimazione; dato $w \in H$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste un vettore $w_\varepsilon \in H$ tale che

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

w_ε ha solo un numero finito di componenti

(basta scrivere w come serie e prendere una somma parziale opportuna). Supponiamo che w_ε abbia solo componenti risp. a $e_1, \dots, e_m$.

$$\langle x_n, w \rangle = \langle x_n, w_\varepsilon \rangle + \underbrace{\langle x_n, w - w_\varepsilon \rangle}_{|\langle x_n, w - w_\varepsilon \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \uparrow \text{C.S.} \leq M \cdot \varepsilon}$$

(Solo un numero finito di componenti)

somma finita

$$\langle x_n, w_\varepsilon \rangle = \sum_{k=0}^m \langle x_n, e_k \rangle \langle w_\varepsilon, e_k \rangle \xrightarrow{\text{stessa cosa con } x_\infty} \langle x_\infty, w_\varepsilon \rangle$$

Quindi riassumendo: $\langle x_n, w \rangle$ è vicino a $\langle x_\infty, w_\varepsilon \rangle$ che è vicino a $\langle x_\infty, w \rangle$.

— o — o —

Oss. Il teorema vero non richiederebbe la limitatezza nel senso che sono equivalenti

(i) $x_n \rightarrow x_\infty$

(ii) x_n è limitata e $\langle x_n, e_i \rangle \rightarrow \langle x_\infty, e_i \rangle$

(Rispetto a prima c'è in più che $x_n \rightarrow x_\infty \Rightarrow x_n$ è limitata)

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO (Compattanza debole delle palle)

Sia H un Hilbert separabile.

Sia $\{u_n\} \subseteq H$ una successione limitata.

Allora esiste una sottosuccessione convergente DEBOLMENTE, cioè esiste una succ. di interi k_n strett. crescente ed esiste $u_\infty \in H$ t.c.

$$u_{k_n} \longrightarrow u_\infty$$

Idea → Prendo una succ. in cui converge la prima comp.
 → Prendo una sotto-sotto-succ. in cui converge la 2ª...
 → concludo con un "procedimento diagonale" misterioso.

Oss. La norma di un vettore non passa al limite per convergenza debole, cioè se $x_n \rightarrow x_\infty$ non è detto che $\|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\|$ (vedi esempio)

MA...

Teorema (Semicontinuità inferiore della norma)

Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x_\infty\|$

(al limite debole la norma può solo crollare)

Dim. $\|x_n\|^2 = \|x_n - x_\infty + x_\infty\|^2$

$$= \underbrace{\|x_n - x_\infty\|^2}_{\geq 0} + 2 \langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle + \|x_\infty\|^2$$
$$\geq 2 \underbrace{\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle}_{\downarrow 0} + \|x_\infty\|^2$$

Faccendo $\liminf$ a dx e sx ottengo la tesi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2 \geq \|x_\infty\|^2$$

— o — o —