

Proprietà delle basi Hilbertiane

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ una base Hilbertiana.

FATTO 1 Sia $c_1, \dots, c_n, \dots$ una successione di numeri reali. Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n}_{\text{serie di vettori}} \text{ converge} \iff \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2}_{\text{serie di numeri}} < +\infty$$

Dim. Considero le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^n c_k e_k$$

$$\hat{S}_n := \sum_{k=0}^n c_k^2$$

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(S_m, S_n) &= \|c_{n+1}e_{n+1} + \dots + c_m e_m\|^2 \\ &= c_{n+1}^2 + \dots + c_m^2 \quad (\text{Ho usato che gli } e_n \text{ sono ortonormali}) \\ &= \hat{S}_m - \hat{S}_n \end{aligned}$$

Quindi la serie di vettori converge $\iff S_n$ è di Cauchy
 $\iff \hat{S}_n$ è di Cauchy
 $\iff$ la serie di numeri è di Cauchy

FATTO 2 Sia $v \in H$ e siano $c_1, \dots, c_n, \dots$ le sue componenti rispetto alla base. Allora

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

Dim. Per ipotesi $v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$. Dete su le solite somme parziali, si ha che $S_n \rightarrow v$ e

$$\|S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^n c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n c_k^2$$

↑
somma finita +
base ortonormale

Quando $n \rightarrow \infty$ il RHS $\rightarrow$ alla serie dei c_k^2 , e il LHS tende a $\|v\|^2$.

Sotto-fatto generale: se $u_n \rightarrow u_{\infty}$, allora $\|u_n\| \rightarrow \|u_{\infty}\|$
Infatti

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|(u_n - u_{\infty}) + u_{\infty}\|^2 \\ &= \|u_n - u_{\infty}\|^2 + \|u_{\infty}\|^2 + 2 \langle u_n - u_{\infty}, u_{\infty} \rangle \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 $\|u_{\infty}\|^2$ 0
 $\text{dist}^2(u_n, u_{\infty})$ perché

$$|\langle u_n - u_{\infty}, u_{\infty} \rangle| \leq \|u_n - u_{\infty}\| \cdot \|u_{\infty}\|$$

$\uparrow$ $\downarrow$
 c.s. 0

FATTO 3 Se $v = \sum a_n e_n$ e $u = \sum b_n e_n$, allora

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Dim. Si dimostra prima che

$$u_n \rightarrow u_{\infty}, \quad v_n \rightarrow v_{\infty} \quad \Rightarrow \quad \langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u_{\infty}, v_{\infty} \rangle$$

e poi si applica con $u_n =$ somme parziali della 1^a serie
 $u_{\infty} =$ " " " 2^a serie

— o — o —

BRUTTA NOTIZIA Negli spazi di Hilbert, così come negli spazi metrichi, posso definire le palle

$$B_R(u_0) = \{ u \in H : \text{dist}(u_0, u) \leq R \}$$

raggio centro chiusa

e le sfere

$$S_R(u_0) = \{ u \in H : \text{dist}(u_0, u) = R \}$$

Se H ha dimensione infinita, allora $B_R(u_0)$ e $S_R(u_0)$ non sono compatte (per successioni).

Esempio Prendiamo una base Hilbertiana $\{e_i\}$. Questa sta in $B_1(0)$ e anche in $S_1(0)$.

Tuttavia NON può avere una s.succ. convergente, perché $\text{dist}(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ per ogni $i \neq j$, quindi nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy.

Per superare questo problema, si introduce la convergenza debole.

Def. Si dice che u_n converge debolmente a u_∞ , e si scrive

$$u_n \rightharpoonup u_\infty$$

se $\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

Oss. Può succedere che questo accada senza che $u_n \rightarrow u_\infty$

Esempio Se e_n è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightarrow 0$,
cioè $\langle e_n, w \rangle \rightarrow 0 = \langle 0, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

Dim. Scrivo w come serie $w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$. Allora

$$\langle e_n, w \rangle = c_n \rightarrow 0 \quad \text{perché} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|w\|^2$$

e se una serie converge, allora il termine generale $\rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

Proprietà 1 Se $U_n \rightarrow U_{\infty}$ (forte), allora $U_n \rightarrow U_{\infty}$ (debole)

Dim. Devo dim. che $\langle U_n, w \rangle \rightarrow \langle U_{\infty}, w \rangle$ per ogni $w \in H$

$$\begin{aligned} \langle U_n, w \rangle &= \langle (U_n - U_{\infty}) + U_{\infty}, w \rangle \\ &= \underbrace{\langle U_n - U_{\infty}, w \rangle}_{\downarrow 0 \text{ per C.S.}} + \langle U_{\infty}, w \rangle \end{aligned}$$

Oss. Non vale il viceversa cioè può succedere che $U_n \rightarrow U_{\infty}$ debole, ma non forte (solito esempio di e_n)

Proprietà 2 Se $u_n \rightarrow u_{\infty}$ e $U_n \rightarrow U_{\infty}$, allora
 $u_n + U_n \rightarrow u_{\infty} + U_{\infty}$

Dim.

$$\begin{aligned} \langle u_n + U_n, w \rangle &= \langle u_n, w \rangle + \langle U_n, w \rangle \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &= \langle u_{\infty}, w \rangle + \langle U_{\infty}, w \rangle \\ &= \langle u_{\infty} + U_{\infty}, w \rangle \end{aligned}$$

Proprietà 3 Se $U_n \rightarrow U_{\infty}$ debole e u_n è limitata (cioè esiste M t.c. $\|u_n\| \leq M$ per ogni n) e $u_n \rightarrow u_{\infty}$ forte, allora

$$\langle u_n, U_n \rangle \rightarrow \langle u_{\infty}, U_{\infty} \rangle$$

Dim. $\langle u_n, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle =$

$$= \langle u_n, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_n \rangle + \langle u_\infty, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle$$

$$= \underbrace{\langle u_n - u_\infty, v_n \rangle}_{\downarrow 0} + \underbrace{\langle u_\infty, v_n - v_\infty \rangle}_{\downarrow 0}$$

$$= \langle u_\infty, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle$$

$$\downarrow$$

$$\langle u_\infty, v_\infty \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle = 0$$

$$|\langle u_n - u_\infty, v_n \rangle| \leq \underbrace{\|u_n - u_\infty\|}_{\downarrow 0 \text{ per ipotesi}} \cdot \|v_n\| \leq M$$

— o — o —

Achtung! Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $v_n \rightarrow v_\infty$, allora non è detto che $\langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v_\infty \rangle$

Esempio

$$u_n = e_n$$

$$v_n = e_n$$

$$u_n \rightarrow 0 = u_\infty$$

$$v_n \rightarrow 0 = v_\infty$$

$$\langle u_n, v_n \rangle = 1$$

$$\langle u_\infty, v_\infty \rangle = 0$$

In particolare non è vero che

$$u_n \rightarrow u_\infty \Rightarrow \|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$$

FALSO

— o — o —

La compattatezza delle palle

→ in $\mathbb{R}$ si dimostra con Bolzano - Weierstrass

→ in $\mathbb{R}^n$ si fa componente per componente (in $\mathbb{R}^2$ data una succ. (x_n, y_n) prima trovo una s.succ. t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$, e di questa trovo una sotto-sotto-succ. $y_{n_{k_i}} \rightarrow y_\infty$)

[Oss.] In $\mathbb{R}^n$ la convergenza dei vettori è equivalente alla convergenza delle componenti

Se $u_m \in \mathbb{R}^{15}$, allora $u_m \rightarrow u_\infty$ come vettori di $\mathbb{R}^{15}$ se e solo se convergono le componenti, cioè

$$\langle u_m, e_k \rangle \rightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle \quad \text{per ogni } k=1, \dots, 15$$

Negli Hilbert le 2 cose non sono più equivalenti

$u_m \rightarrow u_\infty$ forte vuol dire $\text{dist}(u_m, u_\infty) \rightarrow 0$

$u_m \rightarrow u_\infty$ debole vuol dire sostanzialmente "convergenza delle componenti"

Cosa sbagliatissima:

$$\begin{aligned} \|u_m\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_m, e_k \rangle^2 = \langle u_m, e_1 \rangle^2 + \langle u_m, e_2 \rangle^2 + \dots \\ &\quad \downarrow \leftarrow \text{basta la debole} \\ &\langle u_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle u_\infty, e_2 \rangle^2 + \dots \\ &= \|u_\infty\|^2 \end{aligned}$$

NON SI POSSONO SCAMBIARE LIMITI E SERIE.

— 0 — 0 —