

Programma di lungo termine: METODO DIRETTO nel calcolo delle
 variabili $\leadsto$ dimostrare che
 $\min \{ F(x) : x \in X \}$ esiste

Approccio debole:

- ① Si considera un insieme $\hat{X} \supseteq X$ e si estende F all'insieme $\hat{X}$,
 cioè si prende una funzione

$$\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

che estende la F , nel senso che $\hat{F}(x) = F(x)$ se $x \in X$

- ② Si dimostra che

$$\min \{ \hat{F}(x) : x \in \hat{X} \}$$

esiste

- ③ Si spera che almeno un p.to di min di $\hat{F}$ stia in X .

Se tutto ciò funziona, allora esiste il minimo in X .

Dim. Sia x_0 un p.to di minimo in $\hat{X}$ che sta anche in X .
 Questo esiste grazie al ③. Allora

$$\hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) \quad \forall x \in \hat{X}$$

e quindi in particolare

$$F(x_0) = \hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) = F(x) \quad \forall x \in X$$

Quindi x_0 è p.to di min. in X .

Oss. Funziona tutto anche se in ① suppongo solo $\hat{F}(x) \leq F(x)$
 per ogni $x \in X$ purché al p.to ③ aggiunga che $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$.

Esempio (bando) $\min \{ \underbrace{x^2 - 3x + 5}_{F(x)} : x \in \underbrace{\mathbb{Q}}_X \}$

Estendo su $\mathbb{R} = \hat{X}$ e $\hat{F}(x) = x^2 - 3x + 5$ vista su $\mathbb{R}$. Su $\mathbb{R}$ con il calcolo diff. dimostro che il p.to di min. è $2x - 3 = 0$ quindi $x_0 = \frac{3}{2} \in \hat{X}$ ma anche $x_0 \in X$, quindi è p.to di min. anche su X .

$$\min \{ \underbrace{\int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 \arctan(u) dx}_{F(u)} : \underbrace{\begin{matrix} u \in C^1([0,1]) \\ u(0) = 2015 \end{matrix}}_X \}$$

Obiettivo 1. capire chi è un buon $\hat{X}$.

SPAZI DI HILBERT

Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare definito positivo su V è una funzione $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ per ogni $u \in V$, per ogni $v \in V$
- (ii) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$ per ogni...
- (ii') $\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$ " "
- (iii) $\langle u, u \rangle > 0$ per ogni $u \in V$ con $u \neq 0$.

Da un tale prodotto possiamo definire una norma

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \text{"lunghezza del vettore"}$$

Dalla norma segue la distanza tra 2 vettori

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

Prodotto scalare $\rightsquigarrow$ Norma $\rightsquigarrow$ distanza

Def. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale V su cui è definito un prodotto scalare che lo rende uno spazio metrico completo. Formalmente uno sp. di Hilbert è una coppia (sp. vett., prod. scalare)

Idea: uno sp. di Hilbert è la cosa più simile ad $\mathbb{R}^n$ che ci sia

[FATTO 1] Negli spazi di Hilbert H ha senso parlare di serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad v_n \in H$$

La si può definire come limite delle somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^n v_k \quad \text{se } S_n \rightarrow S_{\infty}, \text{ dico che } S_{\infty} \text{ è la somma della serie.}$$

$\uparrow$ so fare le somme perché sono in uno spazio vett. $\uparrow$ so fare i limiti perché sono in un metrico
 $\text{dist}(S_n, S_{\infty}) \rightarrow 0$

Proposizione In uno spazio di Hilbert vale l'implicazione

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < +\infty}_{\text{serie di numeri } \geq 0} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n}_{\text{serie di vettori (elementi di } H)} \text{ converge}$$

[Dim.] Costruisco le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^n v_k \quad \hat{S}_n := \sum_{k=0}^n \|v_k\|$$

So per ipotesi che $\hat{S}_n$ ha limite (finito). Voglio dim. che S_n ha limite. Basta dimostrare che S_n è di Cauchy.

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.,

$$\text{dist}(S_m, S_n) \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(S_m, S_n) &= \|S_m - S_n\| \\ &= \|U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_m\| \\ &\leq \|U_{n+1}\| + \|U_{n+2}\| + \dots + \|U_m\| \\ &= \hat{S}_m - \hat{S}_n \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

perché la successione $\hat{S}_n$ è convergente,
quindi di Cauchy

se $m \geq n \geq n_0$ $\nearrow$

Conclusione: lo stesso n_0 che va bene per $\hat{S}_n$ va bene per S_n .

— o — o —

Oss. Perché è vero che $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$?

$$\begin{aligned} \|a+b\| &= \sqrt{\langle a+b, a+b \rangle} = \sqrt{\|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle} \\ &\stackrel{?}{\leq} \|a\| + \|b\| \end{aligned}$$

Facendo i quadrati si ottiene

$$\cancel{\|a\|^2} + \cancel{\|b\|^2} + 2\langle a, b \rangle \stackrel{?}{\leq} \cancel{\|a\|^2} + \cancel{\|b\|^2} + 2\|a\| \cdot \|b\|$$

$\langle a, b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|$ e questa è Cauchy-Schwarz.

$$\boxed{\text{Cauchy-Schwarz}} \quad |\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a \in H, \forall b \in H$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim.}} \quad p(t) &= \|a + tb\|^2 & t \in \mathbb{R} \\ &= \|a\|^2 + t^2 \|b\|^2 + 2t \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Ora è un polinomio di 2° grado che è ≥ 0 sempre, quindi $\Delta \leq 0$, e

$$\Delta = \langle a, b \rangle^2 - \|a\|^2 \cdot \|b\|^2, \text{ da cui la tesi}$$

BASI NEGLI SPAZI DI HILBERT

Base algebrica È un sottoinsieme $B \subseteq H$ tale che ogni $v \in H$ si può scrivere in modo unico come comb. lin. FINITA di elementi di B .

Detto altrimenti: $\forall v \in H, \exists n \geq 1$ (dipendente da v)
 $\exists c_1, \dots, c_n$ numeri
 $\exists v_1, \dots, v_n \in B$ tali che

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Base Hilbertiana È un sottoinsieme $\{e_n\} \subseteq H$ tale che

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \left] \text{ortonormale} \right.$$

e tale che ogni vettore $v \in H$ si scrive in modo unico come serie

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$$

$\uparrow$
numeri

A questo pto i c_n sono le componenti di v rispetto alla base.