

## TEOREMA DI SOLA ESISTENZA (per il problema di Cauchy)

Consideriamo il problema 
$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con le stesse notazioni di prima.

Supponiamo  $f(t, u)$  continua nel rettangolo e definiamo  $M$  come prima.

Non supponiamo la lip. di  $f(t, u)$  rispetto ad  $u$ .

Sia  $\delta > 0$  tale che  $\delta \leq \delta_0$  e  $\delta M \leq r_0$ .

Allora il problema di Cauchy ammette almeno una soluzione definita in  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .

— o — o —

Per semplicità facciamo la dim. nel caso  $u' = f(u)$  (caso autonomo)

## INGREDIENTE 1 : leo. di Ascoli - Arzelà

### Teorema misterioso (AA edulcorato)

Consideriamo una successione di funzioni  $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

- (i) esiste un intervallo  $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $u_n(t) \in [c, d]$  per ogni  $t \in [a, b]$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$
- (ii) le  $u_n$  sono tutte lip. con una costante che va bene per tutte, cioè esiste  $L > 0$  t.c.

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \leq L |t_1 - t_2|$$

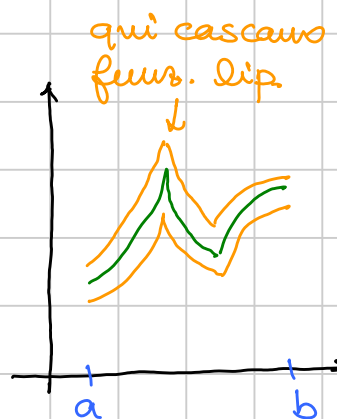
$$\forall t_1 \in [a, b]$$

$$\forall t_2 \in [a, b]$$

Allora esiste una sottosucc. che converge  $\forall n \in \mathbb{N}$

uniformemente, cioè esiste  $n_k \rightarrow +\infty$  ed esiste  $u_\infty: [a, b] \rightarrow [c, d]$  tale che  $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$  unif. in  $[a, b]$ .

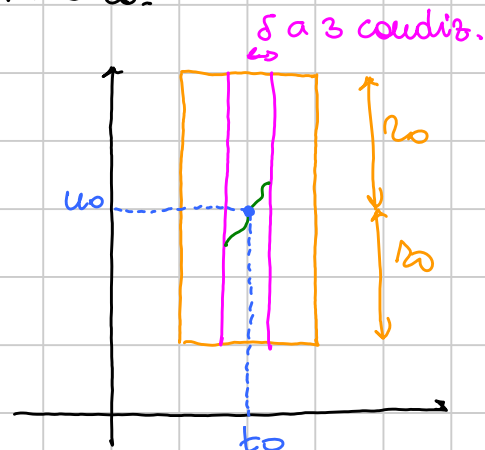
**INGREDIENTE 2** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora esiste una successione di funzioni  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  che sono Lip. (con costanti anche diverse tra di loro) tale che  $f_n \rightarrow f$  uniform. in  $[a, b]$



**INGREDIENTE 3** (Migliora il teo. della lezione precedente)

Prendiamo il pbn. di Cauchy come nel teorema di esistenza e unicità.

Allora esiste una soluzione (unica) definita in  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  purché  $\delta$  soddisfi le prime due richieste, cioè  $\delta \leq \delta_0$ ,  $\delta M \leq r_0$ .



**Dim.** Grazie al teo. prec. otteniamo una sol. in  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  dove  $\delta$  verifica le 3 richieste  $\delta \leq \delta_0$ ,  $\delta M \leq r_0$  e  $\delta L < 1$  (diciamo  $\delta L = \frac{1}{2}$ ). Alla fine dell'intervallo, cioè in  $t_0 + \delta$  ci sono due casi

①  $u(t_0 + \delta) \in (u_0 - r_0, u_0 + r_0)$  (aperto) ed in tal caso posso riapplicare il teo. con la condizione iniziale data in  $t_0 + \delta$  e prolungare ulteriormente la soluzione. Fino a quando posso prolungare? Fino a quando non arrivo sul bordo sopra o sotto.

②  $u(t_0 + \delta) = u_0 \pm r_0$ , cioè sono arrivato sul bordo sopra o sotto. Nel rettangolo

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

quindi

$$|u'(t)| \leq M$$

quindi

$$r_0 = |u(t_0 + \delta) - u(t_0)| \leq M\delta$$

Se sono arrivato sopra/sotto, allora  $M\delta = r_0$  (era  $\leq \dots$ )

## Strategia per il teorema di esistenza

Ho  $f$  solo continua. La approssimo con funzioni  $f_n$  Lipschitz.  
Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  risolvo il problema

$$\begin{cases} u_n' = f_n(u_n) \\ u_n(t_0) = u_0 \end{cases} \rightarrow \text{problemi approssimanti}$$

Spero di dimostrare che  $u_n \rightarrow u_\infty$  e usando che  $f_n \rightarrow f$   
spero di poter dedurre che  $u_\infty' = f(u_\infty)$ .

**Passo 1** Grazie all'ingrediente 2 posso trovare una successione di funzioni  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ .  
Posso fare questo in maniera tale che

$$|f_n(u)| \leq M \quad \forall u \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Passo 2** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  il problema approssimante ha una soluzione (pura unica) definita in  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  dove  $\delta$  verifica 2 disuguaglianze:  $\delta \leq \delta_0$ ,  $\delta M \leq \tau_0$ .

**Dim.** Segue dall'ingrediente 3 e dal fatto che  $M$  è lo stesso per tutte le  $f_n(u)$ .

**Passo 3** La successione  $u_n(t)$  verifica le ipotesi di A.A. edulcorato. Infatti

- (i) per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha che  $u_n(t) \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$  perché i plan. appross. sono definiti in quell'intervallo
- (ii) le  $u_n(t)$  sono tutte Lipschitz perché

$$|u_n'(t)| = |f_n(u_n(t))| \leq M \quad \text{per ogni } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

e un controllo sulla derivata prima implica un controllo sulla costante di Lip.

Quindi, a meno di sottosuccessioni (che non sto ad indicare) avremo che

$$u_n(t) \rightarrow u_\infty(t) \text{ uniformemente.}$$

**Passo 4** La  $u_\infty(t)$  risolve il problema limite

**Dm.** Sappiamo che

$$\begin{array}{ccc} u_n'(t) & = & f_n(u_n(t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ u_\infty'(t) & = & f(u_\infty(t)) \end{array}$$

↑ sapendo solo che  $u_n \rightarrow u_\infty$ , non possiamo dedurre che  $u_n' \rightarrow u_\infty'$

Per non dover scrivere derivate, uso la formulazione integrale che sappiamo già essere equivalente

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f_n(u_n(s)) ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ u_\infty(t) & = & u_0 + \int_{t_0}^t f(u_\infty(s)) ds \end{array} \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Resta da giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale, il che è ok se sapessi che

$$f_n(u_n(t)) \rightarrow f(u_\infty(t)) \text{ uniformemente}$$

$$|f(u_\infty(t)) - f_n(u_n(t))| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(u_\infty(t)) - f(u_n(t))|}_{\text{questa è piccola per } n \text{ grande in quanto } f \text{ è unif. continua e } u_\infty(t) \text{ e } u_n(t) \text{ sono vicini per } n \text{ grande.}} + \underbrace{|f(u_n(t)) - f_n(u_n(t))|}_{\leq d(f, f_n), \text{ quindi è piccolo per } n \text{ grande.}}$$

Dim. ingrediente 2 Data  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, come la approx. con funzioni lip (anzi pure  $C^1$ )?

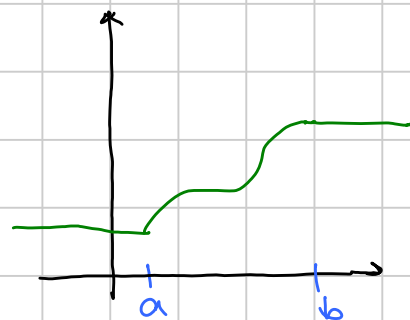
Intanto estendo  $f$  a tutto  $\mathbb{R}$  come viene in mente di fare ...

Poi pongo

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y) dy$$

è come dividere per  $\frac{1}{n}$

media di  $f(x)$  tra  $x$  e  $x+\frac{1}{n}$



È facile verificare che  $f_n \in C^1$  e  $f_n'(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$  quindi  $f_n(x)$  è lip.

$$\begin{aligned} \text{Inoltre } |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y) dy \right| \\ &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(x) dy - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y) dy \right| \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(x) - f(y)| dy \end{aligned}$$

Quando  $\frac{1}{n}$  è piccolo  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ , quindi

$$\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon dy = \varepsilon$$

Questo dice che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente.

— o — o —