

Problema di Cauchy

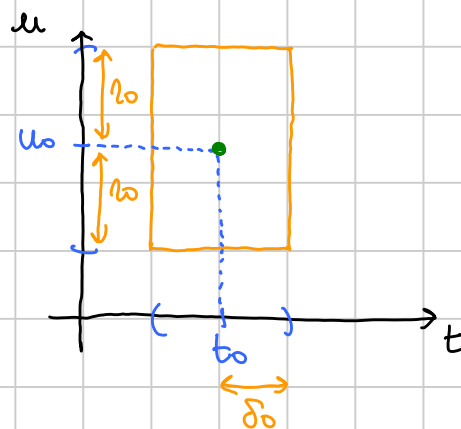
$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

eq. diff. in forma normale
condizione iniziale

Assumiamo che f sia definita almeno in un rettangolo che contiene (t_0, u_0) , diciamo in

$$[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$

per opportuni $\delta_0 > 0$ e $r_0 > 0$.

Teorema di esistenza e unicità

Consideriamo il problema di Cauchy come sopra.

Supponiamo che $f(t, u)$ sia continua nel rettangolo, dunque in particolare esiste

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in \text{rettangolo} \}$$

Supponiamo inoltre che esista una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

$$\forall u_1 \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$

$$\forall u_2 \in \quad "$$

$$\forall t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$$

(Lipschitzianità nella variabile u
uniforme rispetto a t)

Sia $\delta > 0$ tale che (basta prendere δ piccolo)

$$\delta \leq \delta_0$$

$$\delta M \leq r_0$$

$$\delta L < 1$$

Allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione

$$u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$

Oss. La soluzione esiste ed è unica su un intervallo di solito più piccolo di $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$.

Primo passo: FORMULAZIONE INTEGRALE

Una funzione $u \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ risolve il problema di Cauchy se e soltanto se

$u \in C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ risolve il problema integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Oss. Il problema iniziale ha due richieste e vuole $u \in C^1$
Il secondo pbm ha una sola richiesta e vuole $u \in C^0$

Dim. Supponiamo $u \in C^0$ e soluzione del secondo pbm.
Allora banalmente $u(t_0) = u_0$. Inoltre $u \in C^1$ perché è $u_0 +$ primitiva di funzione continua e infine

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

per il teo. fond. del calcolo integrale.

Supponiamo ora che $u \in C^1$ sia una sol. del primo pbm, cioè $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni t e $u(t_0) = u_0$. Allora ovviamente $u \in C^0$ e integrando tra t_0 e t si ottiene

$$\int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$$\begin{matrix} u(t) - u(t_0) \\ \text{"} \\ u_0 \end{matrix}$$

Quindi $u(t)$ risolve il secondo problema.

Conseguenza: se dimostro che l'equazione integrale ha una soluzione unica, allora ho finito.

Secondo passo: formulazione come p.to fisso

Considero lo spazio

$$X := \{ u \in C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) : u_0 - r_0 \leq u(t) \leq u_0 + r_0 \quad \forall t \in \dots \}$$

Per ogni elemento $u \in X$ definisco

$$[Fu](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in \dots$$

In altre parole, Fu è una nuova funzione definita sullo stesso intervallo.

La formulazione integrale è equivalente a cercare una funzione u tale che $u = Fu$, cioè un p.to fisso della funzione F .
Nota bene: F manda funzioni in funzioni e un eventuale p.to fisso sarebbe una sol. del pbm. integrale.

Quindi ora spero che

- X sia uno spazio metrico completo rispetto alla solita distanza (già dimostrato all'ora precedente: basta osservare che la condizione $u(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ si mantiene quando passo al limite)
- $F: X \rightarrow X$ (è ovvio che Fu è continua, ma non che sta nell'intervallo $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$)
- F è una contrazione (non è ovvio)

Terzo passo: $Fu \in X$, cioè $Fu(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$

Dim. $|Fu(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right|$

$$\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds$$

qui serve $t \geq t_0$, altrimenti devo inventare gli estremi

$$\leq \int_{t_0}^t M ds$$

$$= M(t - t_0) \leq M\delta \leq r_0$$

ipotesi per non scappare dall'intervallo

Invertendo gli estremi funziona anche per $t \leq t_0$

Quarto passo: F è una contrazione

Dim. Devo dimostrare che esiste una costante $L < 1$ tale che

$$d(Fu_1, Fu_2) \leq L d(u_1, u_2) \quad \forall u_1 \in X, \forall u_2 \in X$$

↑ distanza tra funzioni

$$|[Fu_1](t) - [Fu_2](t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, u_2(s)) ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^t \{f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\} ds \right|$$

$$\stackrel{\text{solito } t \geq t_0}{\rightarrow} \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds$$

$$\stackrel{\text{ipotesi su } f}{\rightarrow} \leq \int_{t_0}^t L |u_1(s) - u_2(s)| ds$$

↓ per ogni s è $\leq$

$$\leq \int_{t_0}^t L d(u_1, u_2) ds$$

$$= d(u_1, u_2) L(t - t_0)$$

$$\leq d(u_1, u_2) \underbrace{L\delta}_{L < 1 \text{ per ipotesi}}$$

Abbiamo così dim. che

$$|[Fu_1](t) - [Fu_2](t)| \leq L d(u_1, u_2)$$

per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Facendo il sup al variare di t ottengo

$$d(Fu_1, Fu_2) \leq L d(u_1, u_2)$$

— o — o —

Poiché $F: X \rightarrow X$ è una contrazione, avrà un p.to fisso, che quindi è sol. del pbm. integrale, quindi anche del pbm. diff.

Ho dimostrato che la soluzione è unica? NO!

Ho dimostrato che è unica in X , cioè tra quelle che rimangono in $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Potrebbe esserci una soluzione che "scappa prima" dall'intervallo $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$.

Se così fosse, c'è un δ_1 comune in cui entrambe le soluzioni sono definite e non scappano. Ma allora nello spazio X corrispondente a questo δ comune avrei 2 p.ti fissi, ma anche lì ho la contrazione.

— o — o —

