

Teoremi di esistenza / unicità per equazioni differenziali

- Strategie
- ① Via completezza $\leadsto$ teorema delle contrazioni in spazi metrici
 - ② Via completezza $\leadsto$ teorema di ASCOLI-ARZELÀ (problemi approssimanti)

$X \rightarrow$ insieme
 $\rightarrow$ nozione di convergenza ($x_n \rightarrow x_\infty$)
 $\rightarrow$ topologia
 $\Rightarrow$ spazio metrico

Se X è anche uno spazio vettoriale $\rightarrow$ spazio di BANACH
 $\Rightarrow$ spazio di HILBERT

Def. Sia X un insieme. Una distanza su X è una funzione

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà

$$(D0) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in X, y \in Y$$

$$(D1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{per ogni } \dots \quad (\text{simmetria})$$

$$(D3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{disug. triangolare})$$

Def. Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove

- X è un insieme
- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una distanza.

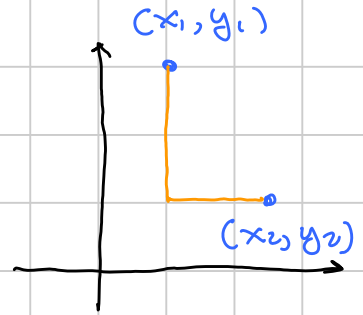
Esempi

- ① $X = \mathbb{R}$ con la solita $d(x, y) = |x - y|$
- ② $X = \mathbb{R}^n$ " " " $d(x, y) = \|x - y\| \leftarrow$ norma
- ③ $X =$ insieme qualunque con

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

- ④ $X = \mathbb{R}^2$ con la distanza taxi driver

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$



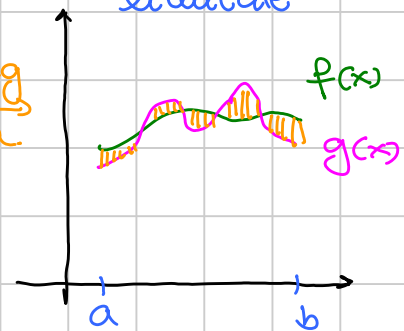
- ⑤ $X = \{ \text{funzioni } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate} \}$
con la distanza

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \}$$

Questo è reale
perché le funz.
 f e g sono
limitate

Bisognerebbe verificare le
(D0) - (D4) (l'unica
cosa meno ovvia è la
triangolare)

distanza tra f e g
= sup delle lunghezze
dei segmenti
verticali



Oss. Avere una distanza implica una nozione di convergenza,
cioè

$$\underbrace{x_n \rightarrow x_\infty}_{\text{elementi di } X} \Leftrightarrow \underbrace{d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0}_{\text{numeri}}$$

Def. Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se tutte le
successioni di Cauchy a valori in X convergono

Analogamente al caso di $\mathbb{R}$, una succ. $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di
Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$$

Esempio 1 $\mathbb{N}$ con la distanza che eredita da $\mathbb{R}$.

È completo?

Sì, perché le uniche successioni di Cauchy sono quelle definitivamente costanti (basta usare la def. con $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

Esempio 2 $(0,1)$ con la distanza che eredita da $\mathbb{R}$ è completo?

No, perché $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy ma non converge ad un elemento dell'insieme.

Teorema Sia $X = C^0([a,b], \mathbb{R})$ (funzioni $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dunque limitate)
con la sdita

$$d(f,g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a,b] \}$$

Allora X è completo.

Dim. Sia $\{f_n(x)\}$ una succ. di Cauchy rispetto alla d .

Passo 1 Fissato un qualunque $x \in [a,b]$, avremo che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m)$$

Quindi ne segue che la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy di numeri, quindi converge ad un limite che chiamiamo $f_\infty(x)$.

Abbiamo così definito $f_\infty: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Così abbiamo dim. la convergenza puntuale

Passo 2 Dimostriamo la convergenza uniforme, cioè rispetto alla distanza d .

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

Facendo il limite per $m \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

$$\text{cioè} \quad d(f_n, f_\infty) = \sup \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in [a, b] \} \leq \varepsilon$$

e questo è come dire che $d(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$.

Passo 3 Ci sarebbe da dire che f_∞ è continua.

Questo segue dal fatto che il limite uniforme di funzioni continue è continuo.

— o — o —

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una funzione $f: X \rightarrow X$ si dice contrazione se esiste una costante $l < 1$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq l d(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in X$$

Oss. La Lipschitzianità è un concetto metrico e una contrazione è una funzione Lip. con costante di Lip. < 1 .

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) uno spazio metrico COMPLETO.

Sia $f: X \rightarrow X$ una contrazione.

Allora f ammette esattamente un pto fisso, cioè esiste un unico $x \in X$ tale che $fx = x$.

Dim.

Unicità Supponiamo che ci siano due pti fissi x_1 e x_2 .
Allora

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq l d(x_1, x_2)$$

$\uparrow$ sono fissi $\uparrow$ contrazione

quindi

$$\underbrace{(1-l)}_{>0} d(x_1, x_2) \leq 0 \quad \leadsto d(x_1, x_2) = 0 \leadsto x_1 = x_2$$

Esistenza Sceglio a caso $x_0 \in X$ e costruisco la succ. per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Se sapessi che $x_n \rightarrow x_\infty$, allora

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$x_\infty = f(x_\infty)$$

Quindi basta dim. che x_n converge, cioè basta dim. che x_n è di Cauchy. Ora

$$d(x_2, x_1) \leq l d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) \leq l d(x_2, x_1) \leq l^2 d(x_1, x_0)$$

$\vdots$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq l^n d(x_1, x_0)$$

Preso quindi $m > n$ avremo che

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} l^k d(x_1, x_0)$$

$$= d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} l^k$$

$$\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} l^k \quad \leftarrow \text{raccolto } l^n, \text{ diventa una}$$

geometrica

$$= d(x_1, x_0) \frac{l^n}{1-l}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ per n (e quindi anche m) abbastanza grande sarà vero che

$$\underbrace{d(x_n, x_m)}_{= 0} \leq \varepsilon.$$

Oss. Se siamo a Pisa e piazziamo una cartina d'Italia sul tavolo, allora c'è un unico pto sulla cartina che rappresenta se stesso.