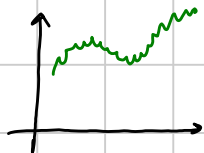
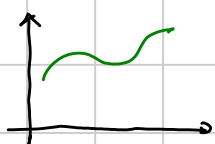


Esempio 1 Trasmissione / ricezione segnali

Segnale: funzione definita in $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$



Problema: dato il segnale disturbato che si riceve, cercare di ricostruire quello di partenza.

Possibile procedura: sia $f(x)$ quello che ricevo.

Considero il funzionale

$$F(u) = \underbrace{\int_a^b [\dot{u}(x)]^2 dx}_{\text{Questo è basso se } u(x) \text{ non è troppo irregolare}} + \underbrace{k \int_a^b [u(x) - f(x)]^2 dx}_{\text{Questo è basso se } u(x) \text{ assomiglia ad } f(x)}$$

positivo
↓

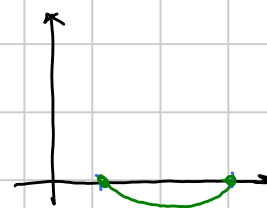
Dato $f(x)$, minimizzare $F(u)$ è una ragionevole procedura per "ripulire" $f(x)$.

↳ tra tutte le funzioni C^1

Esempio 2

$$F(u) = \underbrace{\int_a^b [\dot{u}(x)]^2 dx}_{\text{energia elastica}} + \underbrace{g \int_a^b u(x) dx}_{\text{energia potenziale}}$$

Minimizzare $F(u)$ tra tutte le $u \in C^1([a, b])$ con $u(a) = u(b) = 0$ vuol dire trovare la posizione di equilibrio di una sbarra sospesa tra 2 pti



$$\text{Allungamento} \sim \sqrt{1 + \dot{u}^2} \sim 1 + \frac{1}{2} \dot{u}^2$$

Esempio 2.5

$$F(u) = \int_a^b [\ddot{u}(x)]^2 dx + g \int_a^b u(x) dx$$

con condizioni $u(0) = 3, \dot{u}(0) = 0$



Soluzione esempio 1

$$F(u) = \int \dot{u}^2 + (u - \varphi)^2$$
$$= \int [\dot{u}^2 + u^2 - 2u\varphi + \varphi^2]$$

Poss limitarmi a minimizzare

$$F(u) = \int [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf] dx$$

$$G(t) = \int (\dot{u} + t \dot{v})^2 + (u + tv)^2 - 2(u + tv)f$$

$$= \int (\dot{u}^2 + u^2 - 2uf) + 2t \int \dot{u} \dot{v} + u v - f v + t^2 \int \dot{v}^2 + v^2$$

$$G'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\int u \dot{v} + u v - f v = 0} \quad \forall v \in C^1([a, b]) \text{ senza altri vincoli}$$

Integrando per parti, non possiamo ignorare il bordo, e arriviamo a

$$[uv]_a^b - \int_a^b u'v + \int_a^b uv' = 0$$

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b [-u''(x) + u(x) - f(x)] v(x) dx = 0$$

Usando solo la $\psi(x)$ con $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ottengo (via DBR):

$$-u''(x) + u(x) = f(x)$$

Poi scelgo una $v(x)$ con $v(a) \neq 0, v(b) = 0 \rightsquigarrow u'(a) = 0$
 " " " " " $v(a) = 0, v(b) \neq 0 \rightsquigarrow u'(b) = 0$

Sia $x(x)$ una soluzione del problema. Dico che è un minimo

$$F(u+v) = \int_a^b [(\dot{u}+\dot{v})^2 + (u+v)^2 - 2(u+v)f] dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b (\dot{u}^2 + u^2 - 2fu) dx}_{F(u)} + \underbrace{2 \int_a^b u\dot{v} + uv - 2vf}_{=0 \text{ per Eulero}} + \underbrace{\int_a^b (\dot{v}^2 + v^2)}_{\geq 0 \text{ e nullo solo se } v \equiv 0}$$

Soluzione esempio 2.5

poi si mette
 $u(a)=2, \dot{u}(a)=7$

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b [\ddot{u}(x)]^2 dx}_{F(u)} + g \int_a^b u(x) dx : u \in C^2, \overbrace{u(a)=\dot{u}(a)=0} \right\}$$

$$\begin{aligned} G(t) &:= F(u+tv) = \int_a^b (\ddot{u} + t\ddot{v})^2 dx + g \int_a^b (u(x) + t v(x)) dx \\ &= \int_a^b [\ddot{u}^2 + 2t\ddot{u}\ddot{v} + t^2\ddot{v}^2 + gu + tgv] dx \\ &= \int_a^b (\ddot{u}^2 + gu) dx + t \int_a^b 2\ddot{u}\ddot{v} + gv dx + t^2 \int_a^b \ddot{v}^2 dx \end{aligned}$$

$G'(0) = 0$ se e solo se

$$\int_a^b [2\ddot{u}(x)\ddot{v}(x) + g v(x)] dx = 0$$

per ogni $v \in C^2([a,b])$
con $\underline{v(a)=\dot{v}(a)=0}$,

sarebbe così anche
con $u(a)=2, \dot{u}(a)=7$

$$\begin{aligned} \int \ddot{u}\ddot{v} &= [\ddot{u}\dot{v}]_a^b - \int \ddot{\ddot{u}}\dot{v} \\ &= [\ddot{u}\dot{v}]_a^b - [\ddot{\ddot{u}}v]_a^b + \int_a^b u^{(4)}v \\ &= \ddot{u}(b)\dot{v}(b) - \ddot{\ddot{u}}(b)v(b) + \int_a^b u^{(4)}v \end{aligned}$$

$$2\ddot{u}(b)\dot{v}(b) - \ddot{\ddot{u}}(b)v(b) + \int_a^b [u^{(4)}(x) + g] v(x) dx = 0$$

Prima fase: uso $v(x)$ con $v(b)=\dot{v}(b)=0$. Con un lemma DBR opportuno ottengo

$$\boxed{u^{(4)}(x) = -g} \rightsquigarrow u(x) = -\frac{1}{24}gx^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

Seconda fase Prendo $v(x)$ con $\dot{v}(b)=1$ e $v(b)=0 \rightsquigarrow \ddot{u}(b)=0$
" " " $\dot{v}(b)=0$ e $v(b)=1 \rightsquigarrow \ddot{\ddot{u}}(b)=0$

In conclusione ho ottenuto l'eq. diff.

$$u^{(4)}(x) = -g$$

con quattro condizioni al bordo

$$u(a) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{le avevo all'inizio}$$

$$\dot{u}(a) = 0$$

$$\ddot{u}(b) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{vale dall'equazione}$$

$$\ddot{\ddot{u}}(b) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{di Eulero}$$