

Equazione di Eulero di funzionali

$F(u)$ definito per $u \in X$

$$G(t) := F(u + tv)$$

Se u è un p.to di min per F , allora $G'(0) = 0$ se esiste

Più in generale

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x)) dx$$

$$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = a, u(1) = b \}$$

Preso $v \in C^1([0,1])$ con $v(0) = v(1) = 0$, si ha $u + tv \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e

$$G(t) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) dx.$$

Voglio calcolare $G'(0)$

Brutal mode: $\int_0^1 \varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) dx = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)b + \frac{\varphi''(a)}{2}b^2$

$$\underbrace{\int_0^1 \varphi(\dot{u}(x)) dx}_{G(0)} + \underbrace{\int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) t\dot{v}(x) dx}_{t G'(0)} + \underbrace{\int_0^1 \varphi''(\dot{u}(x)) \frac{t^2 \dot{v}(x)^2}{2} dx}_{+ o(t)} + \dots$$

$$G'(0) = \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx$$

Quindi la prima forma integrale dell'eq. di Eulero diventa

$$\int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

Per andare alla seconda forma integrale, integro per parti

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) \cdot \dot{v}(x) dx = [\varphi'(\dot{u}(x)) v(x)]_0^1 - \int_0^1 [\varphi'(\dot{u}(x))]'\dot{v}(x) dx \\ &= - \int_0^1 [\varphi'(\dot{u}(x))]'\dot{v}(x) dx \\ &= - \int_0^1 \varphi''(\dot{u}(x)) \ddot{u}(x) v(x) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \varphi''(\dot{u}(x)) \ddot{u}(x) v(x) dx = 0} \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

Lemma DBR (DU BOIS - REYMOND) implica

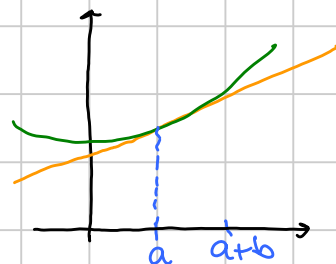
$$\boxed{\varphi''(\dot{u}(x)) \ddot{u}(x) = 0}$$

Oss Se uno sapesse che $\varphi''(x) > 0$ per ogni x , allora l'unica possibilità è che sia $\ddot{u}(x) = 0$, cioè $u(x) = ax + b$.

Lo stesso discorso vale anche se $\varphi''(x) < 0$ per ogni x .

Parentesi sulle funzioni convesse

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora



$$\boxed{\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}}$$

il grafico sta sopra la retta tangente

Dim. Assumiamo che φ sia di classe C^2 . Allora per Taylor-Lagrange

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi'(a)b + \underbrace{\frac{\varphi''(c)}{2} b^2}_{\geq 0} \quad (c \text{ sta tra } a \text{ e } a+b) \\ &\geq \varphi(a) + \varphi'(a)b \end{aligned}$$

Tornando al funzionale, sia $\bar{u}(x)$ la veta che soddisfa le due condizioni agli estremi. Supponiamo $\varphi(x)$ convessa.

Ogni $w \in X$ la posso scrivere come

$$w = \bar{u} + v$$

↑ nulla al bordo

$$\begin{aligned} F(w) &= F(\bar{u} + v) = \int_0^1 \varphi(\dot{\bar{u}}(x) + \dot{v}(x)) dx \\ &\geq \int_0^1 [\varphi(\dot{\bar{u}}(x)) + \varphi'(\dot{\bar{u}}(x)) \dot{v}(x)] dx \\ &= F(\bar{u}) + \underbrace{\int_0^1 \varphi'(\dot{\bar{u}}(x)) \dot{v}(x) dx}_{=0 \text{ per l'equazione di eulero}} \end{aligned}$$

Così abbiamo dim. che $F(w) \geq F(\bar{u})$ per ogni $w \in X$, quindi $\bar{u}$ è un p.to di minimo.

Se ci fosse un altro p.to di minimo, dovrebbe esserci = al posto di $\geq$, ma se $\varphi(x)$ è strett. convessa questo è possibile solo se $\dot{v}(x) = 0$ per ogni x , il che accade solo se $v(x) \equiv 0$ (per via del dato al bordo),

— o — o —

Giustificazione del calcolo di $G'(0)$.

$$\begin{aligned} G'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - G(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(u+tv) - F(u)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 [\varphi(\underbrace{\dot{u}(x)}_a + \underbrace{t \dot{v}(x)}_b) - \varphi(\dot{u}(x))] dx \end{aligned}$$

Ora per Taylor-Lagrange: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot b + \frac{1}{2} \varphi''(c) b^2$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) t \dot{v}(x) dx + \int_0^1 \frac{1}{2} \varphi''(c(x,t)) t^2 \dot{v}(x)^2 dx \right\} \\ &= \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx + \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi''(c(x,t)) \dot{v}(x)^2 dx \end{aligned}$$

Ora mi serve che l'ultimo termine tenda a 0. Mi basta che l'integrale sia limitato.

Ora esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\dot{v}(x)|^2 \leq M \quad \forall x \in [0,1] \quad (\dot{v} \text{ è continua, quindi limitata})$$

Allo stesso modo $\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)$ è limitato, quindi i possibili valori di $C(x,t)$ sono limitati, quindi $\varphi''(C(x,t))$ è limitata perché φ'' è limitata sugli intervalli limitati.

Oss. Si può dimostrare la stessa cosa senza assumere che φ sia di classe C^2 . Quando siamo a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 [\varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))] dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t} dx$$

VORREI

$$= \int_0^1 \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t} \right] dx$$

uso solo che φ è C^1

$$= \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx$$

Il vorrei è basato su un teorema di scambio limite/integrale, che si può fare se c'è convergenza uniforme. Quello che dovrebbe convergere unif. è

$$\frac{\varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t} \rightarrow \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x)$$

✓ Lagrange

↑

la conv. puntuale è la def di derivata
l'uniforme è qualcosa in più,

$$\frac{\varphi'(C(x,t)) \cdot t\dot{v}(x)}{t}$$

Caso più generale

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x)) dx + \int_0^1 \psi(u(x)) dx$$

$$\begin{aligned} \underbrace{F(u+tv)}_{G(t)} &= \int_0^1 \varphi(\dot{u} + t\dot{v}) dx + \int_0^1 \psi(u+tv) dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \varphi(\dot{u}) dx}_{F(u)} + \underbrace{\int_0^1 [\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v] dx}_{G'(0)} + t^2 \cdot \text{roba} \\ &\quad + t \cdot G'(0) + t^2 \cdot \text{roba} \end{aligned}$$

Eq. di Eulero

$$\int_0^1 [\varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) + \psi'(u(x)) v(x)] dx = 0$$

Integro per parti il primo e se il bordo se ne va

$$\int_0^1 \left\{ - [\varphi'(\dot{u}(x))] + \psi'(u(x)) \right\} v(x) dx = 0$$

Per il lemma DBR si arriva a

$$[\varphi'(\dot{u}(x))] = \psi'(u(x)) \quad \text{oppure} \quad \boxed{\varphi''(\dot{u}(x)) \dot{u}(x) = \psi'(u(x))}$$

Ancora più generale

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x), u(x), x) dx$$

L'equazione di Eulero diventa

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_0^1 \varphi(\dot{u} + t\dot{v}, u + tv, x) dx \\ &= \int_0^1 \varphi(\dot{u}, u, x) + \varphi_{\dot{u}}(\dot{u}, u, x) t\dot{v} + \varphi_u(\dot{u}, u, x) tv + t^2 \cdot \text{roba} \end{aligned}$$

Euler prima forma

$$\int_0^1 \varphi_{ii}(\dot{u}, u, x) \dot{v} + \varphi_{ui}(\dot{u}, u, x) v = 0$$

Seconda forma

$$\int_0^1 \{ - [\varphi_{ii}(\dot{u}, u, x)]' + \varphi_{ui}(\dot{u}, u, x) \} v = 0$$

e infine

$$[\varphi_{ii}(\dot{u}, u, x)]' = \varphi_{ui}(\dot{u}, u, x)$$

Forma diff. dell'eq.
di Euler nel caso
generale,