

Lemma (DBR) $\int_a^b f v = 0 \quad \forall v \in C^1 \text{ nulla al bordo}$

Allora $f(x) \equiv 0$.

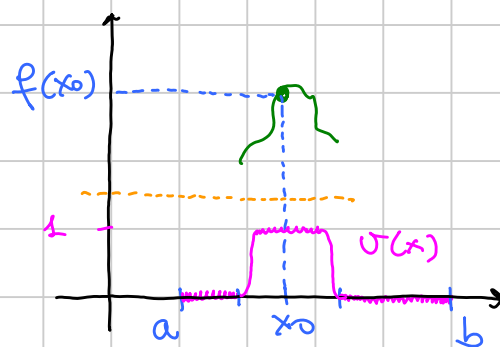
Dim. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) > 0$. Allora esiste una $v(x)$ che rispetta le condizioni per cui l'integrale viene positivo.

Essendo f continua c'è un intorno $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$ in cui $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$.

Vi basta ora trovare $v(x)$ di classe C^1 tale che

- $v(x) = 0$ fuori da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $v(x) = 1$ su $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$
- $0 \leq v(x) \leq 1$ ovunque.

— o — o —



Oss. L'idea di dimostrazione permette di capire diverse varianti del Lemma, ad esempio

- ① funziona uguale se l'ipotesi vale solo per $v \in C^1$
- ② funziona uguale anche se molti valori diversi da 0 al bordo (basta andare subito a 0 vicino al bordo)
- ③ posso imporre condizioni anche in punti interni ad $[a, b]$ oltre che negli estremi.

— o — o —

Esempio 2 $F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 dx + \int_0^1 u^2 dx$

$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 7 \}$ (senza condizioni in $x=1$)

Considero $\underline{u(x) + tv(x)}$ dove $v \in C^1([0,1])$ e $v(0) = 0$.
 $\in X$ per ogni t

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^1 [(\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u + tv)^2] dx \\ &= \int_0^1 \dot{u}^2 + 2t \int_0^1 \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^1 \dot{v}^2 + \int_0^1 u^2 + 2t \int_0^1 uv + t^2 \int_0^1 v^2 \\ \varphi'(t) &= 2 \int_0^1 \dot{u} \dot{v} + 2t \int_0^1 \dot{v}^2 + 2 \int_0^1 uv + 2t \int_0^1 v^2 \end{aligned}$$

Quindi $\varphi'(0) = 0$ se e solo se

$$\boxed{\int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = 0}$$

1^a forma integrale dell'eq. di Eulero

Integro per parti il 1^o integrale (obiettivo: ottenere $v(x)$ in vista dell'applicazione di DBP)

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x) v'(x) dx &= [u'(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u''(x) v(x) dx \\ &= u'(1) v(1) - \int_0^1 u''(x) v(x) dx \end{aligned}$$

Quindi la seconda forma di Eulero integrale è

$$\boxed{u'(1) v(1) + \int_0^1 [u(x) - u''(x)] v(x) dx = 0}$$

Se $u(x)$ è un p.to di minimo, l'eq. sopra deve valere per ogni $v \in C^1([0,1])$ tale che $v(0) = 0$.

Agisco in due tempi

- ① L'equazione deve essere vera a maggior ragione per tutte le $v \in C^1$ con $v(0) = v(1) = 0$. Quindi

$$\int_0^1 [u(x) - u''(x)] v(x) dx = 0$$

per queste v , che bastano per usare DBR. Quindi

$$\boxed{u''(x) = u(x)} \quad \text{Forma diff. dell'Eq. di Eulero}$$

- ② A questo punto, se $u(x)$ è un p.to di min. (di classe C^2), allora per forza

$$u'(1) v(1) = 0$$

per ogni $v \in C^1$ con $v(0) = 0$. Quindi basta fare in modo che $v(1) = 1$ (o comunque $\neq 0$) per dedurre che

$$\boxed{u'(1) = 0} \quad \leftarrow \text{condizione al bordo nata da Eulero}$$

Conclusione: se $u(x)$ è un p.to di minimo, allora risolve

$$\begin{cases} u''(x) = +u(x) & \text{Eq. diff. nata da Eulero} \\ u(0) = 1 & \text{Cond. al bordo iniziale} \\ u'(1) = 0 & \text{Cond. al bordo nata da Eulero} \end{cases}$$

Questo problema si risolve esplicitamente. La soluzione è del tipo

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

e c_1 e c_2 si determinano univocamente con le cond. al bordo.

Sia $\bar{u}(x)$ la soluzione così trovata. È veramente un p.to di min?

Disuguaglianza! Una qualunque altra $w \in X$ si scrive come

$$w = \bar{u} + tv$$

↑ di classe C^1 e $v(0) = 0$

$$F(w) = F(\bar{u}) + \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 + \int_0^1 v^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\int_0^1 \bar{u}'v + \int_0^1 \bar{u}v}_{=0}$$

= 0 perché $\bar{u}$ soddisfa l'Eulero finale, quindi anche la 1ª forma iniziale di Eulero
(integrare per parti per verifica)

$$\geq F(\bar{u})$$

con uguaglianza se e solo se $v(x) \equiv 0$, cioè se e solo se $\bar{u}(x) = w(x)$.

— o — o —

Oss. Quello che è venuto fuori è un problema diff. del 2° ordine con due condizioni al bordo.

Ci sono 2 tipi di condizioni al bordo

- condizioni di DIRICHLET: prescrivere $u(x)$ in un estremo
- condizioni di NEUMANN: " $u'(x)$ " " "

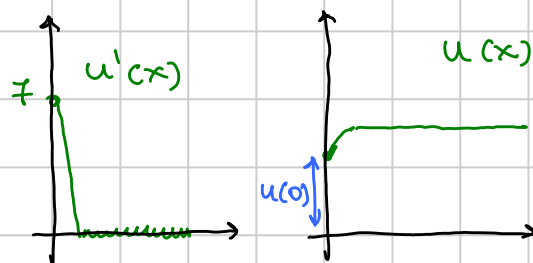
Moralmente: se in un estremo ho messo in partenza una condizione di D me la ritrovo nell'eq. finale; se in un estremo non ho richiesto nulla, mi ritrovo N in quell'estremo

— o — o —

Esempio $F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 dx$ $X = \{u \in C^1([0,1]) \text{ con } u'(0) = 7\}$

Basta che $u'(x)$ sia quasi subito 0.

$I_{\inf} = 0$, min. non esiste

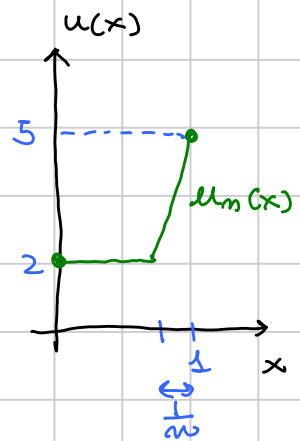


Esempio $F(u) = \int_0^1 |u'|^{1/2} dx$

$$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 2, u(1) = 5 \}$$

Atteniamo le regole: prendiamo u
 C^1 a tratti

$$F(u_m) = \int_{1-\frac{1}{m}}^1 \underbrace{|3m|}_{u'_m(x)}^{1/2} dx = \frac{3\sqrt{m}}{m} \rightarrow 0$$



A patto di "smussare l'angolo" ottengo lo stesso effetto anche
in C^1 . Quindi $\inf = 0$.