

INTRODUZIONE AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

CdV = problemi di max/min (sostanzialmente di min)

Problema. Dato un insieme X e una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, studiare

$$\min \{ f(x) : x \in X \}$$

Ci si chiede : $\rightarrow$ se il minimo esiste

$\rightarrow$ se esiste, calcolarlo e trovare i p.ti di min

$\rightarrow$ se non esiste, capire chi è l'inf. e perché il minimo non esiste.

Spesso l'insieme X è contenuto in uno spazio dim. infinita, ad esempio uno spazio di funzione.

Esempio 1 $F_1(u) = \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$

$X =$ insieme delle funzioni $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 che soddisfano $u(0) = 1$ e $u(1) = 3$

Notaione: quando la funzione da minimizzare ha come argomento delle funzioni, si chiama FUNZIONALE

Altri esempi : $F_2(u) = \int_0^1 |u'(x)| dx$ $F_3(u) = \int_0^1 |u'(x)|^{1/2} dx$

Questi sono esempi di funzionali integrali

Due possibili approcci:

→ METODO INDIRETTO

→ METODO DIRETTO

Esempio $X = \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 2y + 5$$

Metodo indiretto: → cercare i candidati p.ti di min

→ sperare di dir. a mano che sono minimi

I candidati li cerco tra i p.ti stazionari

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 0 & x = -3 \\ 8y + 2 = 0 & y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Se c'è il minimo, allora viene assunto in $(-3, -\frac{1}{4})$ e vale

$$f(-3, -\frac{1}{4}) = 9 + \frac{1}{4} - 18 - \frac{1}{2} + 5 = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$$

Spero di dimostrare che $f(x, y) \geq -\frac{17}{4}$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$x^2 + 4y^2 + 6x + 2y + 5 \stackrel{?}{\geq} -\frac{17}{4} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4y^2 + 6x + 2y + 9 + \frac{1}{4}}_{?} \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (2y + \frac{1}{2})^2 \stackrel{?}{\geq} 0$$

Questo è vero con uguaglianza $\Leftrightarrow x = -3$ e $y = -\frac{1}{4}$.

Metodo diretto: → dimostrare in qualche modo che il min. esiste
→ trovare i p.ti stazionari, e quelli in cui f vale meno sono i p.ti di min. per forza.

Per dimostrare l'esistenza si ricorre a Weierstrass o varianti.

Nell'esempio si tratta di dim. che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

e usare Weierstrass generalizzato.

EQUAZIONE DI EULERO (Metodo indiretto applicato ai funzionali)

Obiettivo: trovare i candidati p.ti di minimo (l'equiv. di $\nabla f = 0$)

Molto in generale: sia X un insieme, e sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale.

Sia $x_0 \in X$ un p.to di minimo per F .

Sia $\gamma: [-\delta, \delta] \rightarrow X$ una curva ($\delta > 0$) a valori nell'insieme X

Supponiamo che $\gamma(0) = x_0$.

Posso considerare la funzione

$$[-\delta, \delta] \ni t \rightarrow \underbrace{F(\gamma(t))}_{= \varphi(t)} \in \mathbb{R}$$

Osservazione fondamentale: se x_0 è un p.to di min. per $F(x)$, allora $t=0$ è un p.to di min. per $\varphi(t)$.

Quindi: se $\varphi(t)$ è derivabile in $t=0$, allora per forza $\varphi'(0) = 0$

Nota bene: la funzione φ va da $[-\delta, \delta]$ in $\mathbb{R}$, quindi la sua derivabilità è quella di Analisi 1.

Quindi: se esiste una curva $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = x_0$ e $\varphi'(0) \neq 0$, allora x_0 non può essere p.to di minimo.

Oss. È l'analogo della derivata direzionale di Analisi 2.

Esempio

$$F(u) = \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$$

$$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 2, u(1) = 5 \}$$

Supponiamo che $u(t)$ sia un pto di minimo.

Prendo una qualunque funzione $v(t)$ tale che $v(0) = 0$ e $v(1) = 0$.

Allora la funzione $\downarrow$ in $C^1([0,1])$

$u(x) + t v(x)$ sta in X per ogni $t \in \mathbb{R}$

Quindi posso considerare

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= F(u + tv) = \int_0^1 [u'(x) + t v'(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 [u'(x)]^2 dx + 2t \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \\ &\quad + t^2 \int_0^1 [v'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Come funzione di t ha senso calcolare $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = 2 \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + 2t \int_0^1 [v'(x)]^2 dx$$

Se $u(x)$ è un pto di minimo, allora per forza deve essere $\varphi'(0) = 0$ e cioè

$$\boxed{\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = 0}$$

1ª forma integrale dell'eq.
di Eulero

Detto brutalmente: $\int_0^1 u'(x) v'(x) dx$ rappresenta la derivata direzionale

di $F(u)$ nella direzione v , e deve fare 0 per ogni v se u è un pto di minimo.

Usiamo ora l'integrazione per parti

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \underbrace{[u'(x) v(x)]_{x=0}^{x=1}}_{=0 \text{ perché } v(x) \text{ si annulla agli estremi}} - \int_0^1 u''(x) v(x) dx$$

Quindi, supponendo per un attimo che $u(x)$ sia di classe C^2 , l'equazione di Eulero è diventata

$$\boxed{\int_0^1 u''(x) v(x) dx = 0} \quad \begin{array}{l} \text{2ª forma integrale} \\ \text{dell'equazione di Eulero} \end{array}$$

Se $u(x)$ è un p.to di minimo, ed è di classe C^2 , allora questa equazione deve essere soddisfatta per ogni $v(x)$ di classe C^1 con $v(0) = v(1) = 0$.

Lemma (DBR) Sia $f(x)$ una funzione in $C^0([a,b])$ tale che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0$$

per ogni $v(x)$ in $C^1([a,b])$ con $v(0) = v(1) = 0$.

Allora

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

— 0 — 0 —

Dato per buono il Lemma DBR, l'equazione diventa

$$\boxed{u''(x) = 0} \quad \text{Eq. di Eulero in forma differenziale}$$

Conseguenza: l'unico candidato ad essere il p.to di minimo è la retta che congiunge i due valori al bordo, cioè la retta

$$u(x) = 2 + 3x$$

Ritorniamo ora a concludere.

Prendo $u(x) = 2 + 3x$ e prendo una qualunque altra $w \in X$.

Osservo che posso scrivere

$$w(x) = u(x) + v(x)$$

$\uparrow C^1$ e nulla al bordo

Ora

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_0^1 [w'(x)]^2 dx = \int_0^1 [u' + v']^2 dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 [u']^2 dx}_{F(u)} + \underbrace{2 \int_0^1 u' v' dx}_0 + \underbrace{\int_0^1 [v']^2 dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

per Eulero nella
1ª forma integrale

$$\geq F(u)$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se $\int_0^1 [v'(x)]^2 dx = 0$,
cioè se e solo se $v'(x) = 0$ per ogni
 $x \in [0, 1]$ e avendo $v(x)$ valore nullo al bordo questo accade
se e solo se $v(x) \equiv 0$.

Conclusione: esiste il minimo di $F(u)$ in X e l'unico p.to
di minimo è la funzione $u(x) = 2 + 3x$.