

TEOREMA DI SCAMBIO DELLA CONTINUITÀ

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

- (i) $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente in D (non vale per la puntuale!)
- (ii) $f_n(x)$ continua in D per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $f_\infty(x)$ è continua in D .

Dim. Prendi $x_0 \in D$. Per ipotesi so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n = f_n(x_0)$$

Ora per il te. di scambio dei limiti so che $l_n \rightarrow l_\infty$, ma dall'uguaglianza di sopra so già che $l_\infty = f_\infty(x_0)$. Inoltre

$$f_\infty(x_0) = l_\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x)$$

e questo mi dice che $f_\infty(x)$ è continua in x_0 .

Teorema di scambio della derivata (rivisitato)

Siano $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Supponiamo che

- (i) $f_n'(x) \rightarrow g_\infty(x)$ uniformemente
- (ii) esiste un pto $x_0 \in [a, b]$ ed esiste $l_\infty \in \mathbb{R}$ t.c.
 $f_n(x_0) \rightarrow l_\infty$ per $n \rightarrow +\infty$

Allora $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente, dove

$$f_\infty(x) = l_\infty + \int_{x_0}^x g_\infty(t) dt \quad \text{e ovviamente } f_\infty'(x) = g_\infty(x).$$

Dica.

Per il teo. precedente sappiamo che g_∞ è continua e quindi per il teo. fond. del calcolo integrale sappiamo che $f_\infty \in C^1$ e $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$.

Scrivendo come prima

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t) dt$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\leftarrow$ Teo. scambio integrale

$$l_\infty + \int_{x_0}^x g_\infty(t) dt = f_\infty(x)$$

e questo mostra che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente.

Per averla uniforme, faccio la differenza e ottengo

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_0) - l_\infty|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } n \text{ grande}} + \int_{x_0}^x |f_n'(t) - g_\infty(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} |b-a| \text{ per } n \text{ grande}$$

Quindi per ogni $x \in [a,b]$ il LHS è $\leq \varepsilon$ per n grande e la grandezza di n NON dipende da x .

— o — o —

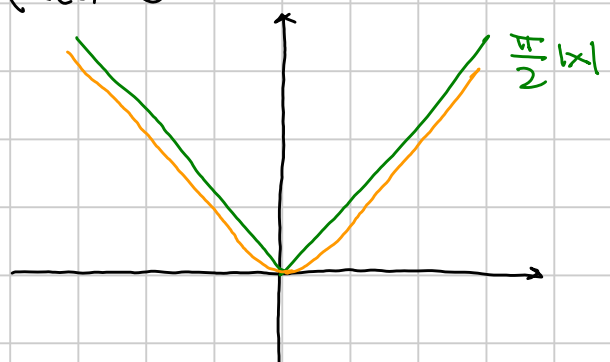
Esempio Trovare $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ con convergenza uniforme
 $\uparrow$
 C^1
una derivata $f_\infty(x)$ con di classe C^1 .

Idea: basta integrare uno degli esempi di prima, ad esempio fare in modo che

$$f_n'(x) = \arctan(nx) \quad f_n(0) = 0$$

(Fare il conto per esercizio)

Altro esempio: $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$



SERIE DI FUNZIONI

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Si costruisce la successione delle somme parziali

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Si dice che la serie converge puntualmente / uniformemente a seconda di quello che fa $S_n(x)$.

C'è una scorciatoia per dimostrare la convergenza uniforme, e si chiama convergenza totale.

Def. Siano $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che la serie converge **TOTALMENTE** se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sup \{ |f_n(x)| : x \in D \}}_{\text{NUMERI}} \text{ converge}$$

Osservazione Supponiamo che esista una successione di numeri M_n tali che

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D$$

e tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$$

Allora la serie di funzioni converge totalmente.

Dim. Si ha che $0 \leq \sup \{ |f_n(x)| : x \in D \} \leq M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

quindi la serie dei sup converge per confronto tra serie.

Teorema Se una serie converge totalmente, allora converge uniformemente.

Dim. Chiamiamo $L_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in D \}$. Per ipotesi sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n < +\infty,$$

Passo 1 Per ogni $x \in D$ dimostro che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Questo è vero perché converge assolutamente, in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} L_n < +\infty$$

$\uparrow$ def. di L_n $\uparrow$ ipotesi

Questo mi autorizza a definire $S_{\infty}(x)$ come la somma della serie, per ora nel senso della convergenza puntuale.

Passo 2 Devo far vedere che $S_n(x) \rightarrow S_{\infty}(x)$ uniformemente.

Idea: $S_{\infty}(x) - S_n(x)$ è la "coda" della serie, la quale è $\leq$ della coda della serie degli L_n .

$$\begin{aligned} |S_{\infty}(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} L_k \end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per n abbastanza grande il RHS è $\leq \varepsilon$ perché la serie di L_n converge, quindi il LHS è $\leq \varepsilon$ per ogni $x \in D$ il che mostra la convergenza uniforme

— o — o —

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(nx) + \arctan x^4}{n^{20} + 3}}_{f_n(x)}$$

Questa formula definisce una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio di Analisi 1: la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\text{num.}|}{n^{20} + 3} \leq \frac{30}{n^{20} + 3}$$

Convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza.

Questo basta per definire $S_{\infty}(x)$

1° Esercizio di Analisi 2: $S_{\infty}(x)$ è continua. Abbiamo M_n il RHS di sopra. Quindi ho conv. totale, quindi unif.
Le somme parziali sono continue, quindi il limite è continuo.

2° Esercizio di Analisi 2: per dim. che $S_{\infty}(x)$ è derivabile basta dim. che la serie delle derivate converge unif.
La calcolo e spero nella totale sulle derivate

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^{20} + 3} \left(n \cos(nx) + \underbrace{\frac{4x^3}{1+x^8}}_{\text{ha un max } M} \right)$$

$$|f_n'(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{n^{20} + 3} (n + M)}_{\text{questa converge, quindi c'è la totale}}$$

Prevedo guai sulla derivata 19-esima di $S_{\infty}(x)$.

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx^2)}{n^3 + 1} = S_{\infty}(x)$$

Come prima: $S_{\infty}(x)$ definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$

Verifichiamo la derivata

se faccio il sup su $\mathbb{R}$ crea problemi 😞

$$f'_n(x) = \frac{2nx \cos(nx^2)}{n^3 + 1}$$

Non dico che la serie di $f'_n(x)$ converge unif. su tutto $\mathbb{R}$.
Dico però che conv. unif. su $[-A, A]$ per ogni $A > 0$ poiché

$$|f'_n(x)| \leq \frac{2nA}{n^3 + 1} \quad \forall x \in [-A, A]$$

↑
serie converge

Conseguenza: $S(x)$ è derivabile su $[-A, A]$ per ogni $A > 0$
quindi è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

— o — o —