

RIPASSO: SUCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA

Def. Una successione x_n di numeri reali è una succ. di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |x_n - x_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$$

Teorema Ogni successione di Cauchy ha limite reale

In maniera equivalente si enuncia dicendo che $\mathbb{R}$ è un insieme completo, cioè di succ. di Cauchy convergono.

Fatto 1 Se x_n ha limite reale, allora x_n è di Cauchy.

Dim. Supponiamo $x_n \rightarrow x_\infty$

Idea euristica: se definitivamente gli x_n stanno vicini ad x_∞ , allora stanno vicini tra di loro.

Formalmente: prendo $\varepsilon > 0$ e per definizione di limite

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |x_n - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora $\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$ si avrà che

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_\infty + x_\infty - x_m| \\ &\leq |x_n - x_\infty| + |x_m - x_\infty| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Fatto 2 Sia x_n una succ. di Cauchy.

Supponiamo che esista $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ (s.succ. conv.)

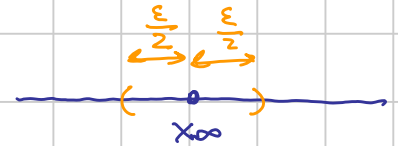
Allora $x_n \rightarrow x_\infty$

Dim. Idea euristica: la s.succ. convergente si tira dietro tutti gli altri termini.

Formalmente: fisso $\varepsilon > 0$.

Essendo di Cauchy $\exists n_0$ t.c. $|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$

Perch  esiste una s.succ. convergente,
 $\exists n_1 \geq n_0$ t.c. $|x_{n_1} - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.



Ma allora per ogni $n \geq n_0$ avremo che

$$\begin{aligned} |x_n - x_\infty| &= |x_n - x_{n_1} + x_{n_1} - x_\infty| \\ &\leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_\infty| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per scelta di } n_1, \\ &\quad \text{perch  gli indici} \\ &\quad \text{sono } \geq n_0 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

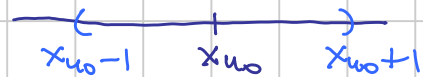
— 0 — 0 —

Fatto 3 Ogni successione di Cauchy   limitata

Dim. Fisso $\varepsilon = 1$. Allora $\exists n_0$ t.c. $|x_n - x_{n_0}| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$

Tutti i termini tranne un numero finito stanno tra

$x_{n_0} - 1$ e $x_{n_0} + 1$,



— 0 — 0 —

Dim 1 del teorema Sia x_n una succ. di Cauchy

1 - per il fatto 3 si ha che x_n   limitata

2 - dunque per Bolzano - W ha una s.succ. convergente

3 - dunque per il fatto 2 converge tutta.

— 0 — 0 —

Dim. 2 del teorema

1 - come sopra x_n è limitata

2 - dunque esistono

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$$

ovviamente con $l \leq L$

3 - Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n \leq x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora

$$x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq l \leq L \leq x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui $L - l \leq \varepsilon$

4 - Dal punto precedente si conclude che $l = L$, cioè esiste il limite.

— o — o —

META-IDEA Per dimostrare che una succ. ha limite, ci sono varie strategie:

- ① Esibire il limite e poi usare la definizione o gli strumenti per il calcolo
 - ② usare la monotonia
 - ③ Dimostrare che è una succ. di Cauchy
- } Dimostrano l'esistenza senza calcolarlo esplicitamente

Teorema (analisi 1) Sia a_n una successione.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Dim via completezza Siano S_n le somme parziali della 2^a e $\bar{S}_n$ le somme parziali della prima.

Basta dim. che S_n è di Cauchy. Supponiamo $n > m$

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| \\
&\leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| \\
&= \bar{S}_n - \bar{S}_m \\
&= |\bar{S}_n - \bar{S}_m|
\end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{RHS} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$.
Ma allora pure $\text{LHS} \leq \varepsilon$, quindi S_n è di Cauchy.
— o — o —

TEOREMA DI SCAMBIO DEI LIMITI

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.

Sia x_0 un pto di accumulazione di D .

Supponiamo che

(i) $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente

(ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$$

Allora intanto l_n ha un certo limite l_∞ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty$$

il limite della funzione limite è
il limite dei limiti

Dim. Intanto dimostriamo che $\{l_n\}$ è una succ. di Cauchy, anzi prima ancora dimostriamo

Fatto 1 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, \forall x \in D$$

Questo si fa come prima...

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_m(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \qquad \leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Fatto 2 $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ e passo al limite per $x \rightarrow x_0$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ |l_n - l_m| & \leq \varepsilon & \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0 \end{array}$$

Quindi l_n è di Cauchy e quindi $l_n \rightarrow l_\infty$

Fatto 3 Resta da dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty$

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l_\infty|$$

↑
voglio dir. che va sotto ε per ogni x abbastanza vicino a x_0

$\leq \frac{\varepsilon}{3}$
↑
qualsunque sia x quando n è grande

↑
Fissato n , questo è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando x è abbastanza vicino a x_0

$\leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando n è grande

Quindi: dato $\varepsilon > 0$, scelgo $n \in \mathbb{N}$ in maniera tale che 1° e 2° addendo stiano sotto $\frac{\varepsilon}{3}$.

Fissato quel valore di n , scelgo $\delta > 0$ in modo tale che $|f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando $|x - x_0| \leq \delta$ (e $x \in D$ e $x \neq x_0$)

— o — o —