

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Famiglia f_n di funzioni, con $n \in \mathbb{N}$.
Si intende che $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$.

- Convergenza puntuale
- Convergenza uniforme

Def. Si dice che la successione $f_n(x)$ converge **PUNTUALMENTE** ad una funzione $f_0(x)$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_0(x) \quad \forall x \in D.$$

Detto "sostituendo il limite", questo equivale a

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon$$

↑
no dipende da
 x e da ε

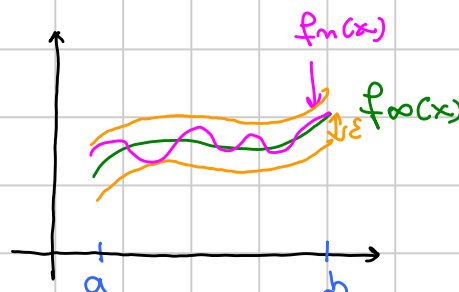
Def. Si dice che $f_n(x)$ converge **UNIFORMEMENTE** a $f_0(x)$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon$$

↑
no dipende solo da
 ε e va bene per tutti gli x

Oss. Dire che $|f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D$ è come dire che il grafico di $f_n(x)$ sta in una striscia di ampiezza ε centrata sul grafico di $f_0(x)$.

Il grafico di $f_n(x)$ sta nella striscia per n grande

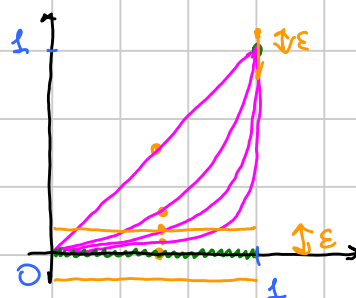


Oss. facile Se $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente, allora converge puntualmente.
In generale non vale il viceversa.

Esempio 1 $D = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)} \right\} \text{ Questa sarebbe la funzione } f_\infty(x)$$

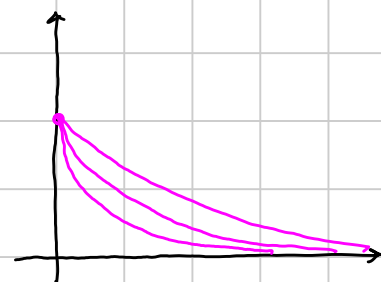
Il limite non è uniforme, perché fissato $\varepsilon \in (0, 1)$ non è vero che il grafico di $f_n(x)$ sta nella striscia di ampiezza ε intorno al grafico di $f_\infty(x)$.



Esempio 2 $D = [0, +\infty)$ $f_n(x) = e^{-nx}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

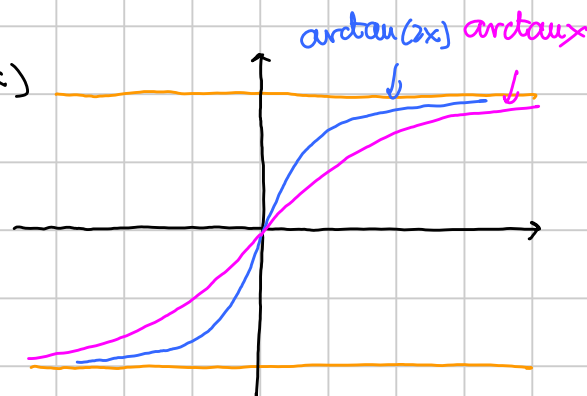
Il limite non è uniforme.



Se invece fosse $D = [1, +\infty)$, allora il limite sarebbe uniforme. Fissato $\varepsilon > 0$, appena $e^{-n} \leq \varepsilon$, anche $e^{-nx} \leq \varepsilon$ per ogni $x \geq 1$.

Esempio 3 $D = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \arctan(nx)$

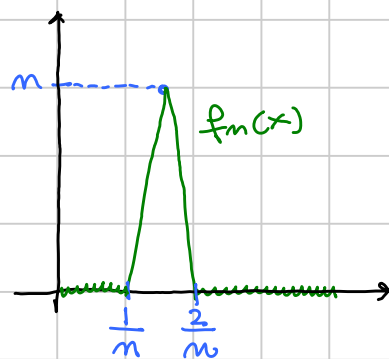
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il limite non è unif. in $\mathbb{R}$, ma lo sarebbe in $[1, +\infty)$, ma non $(0, +\infty)$

Oss. Può accadere che il limite puntuale di funzioni continue non sia una funzione continua.

Esempio 4 $D = [0, 1]$ $f_n(x)$ come da disegno



$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in D$ perché

- se $x = 0$ valgono sempre tutte e 0,
- se $x > 0$, da un certo n in poi $f_n(x) = 0$.

Il limite ovviamente NON è uniforme. Inoltre

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{ma} \quad \int_0^1 f_\infty(x) dx = 0$$

Oss. Se $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente in D , NON È DETTO che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_D f_n(x) dx = \int_D f_\infty(x) dx$$

— 0 — 0 —

Utilità della conv. uniforme è che permette i teoremi di scambio

Teorema di scambio dell'integrale

Supponiamo che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente in $[a, b]$.

Supponiamo che $f_n(x)$ e $f_\infty(x)$ siano continue.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_\infty(x) dx$$

Il limite dell'integrale è l'integrale del limite

Dim.

$$\left| \int_a^b f_\infty(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_\infty(x) - f_n(x)) dx \right|$$

$$\text{prop. integr.} \rightarrow \leq \int_a^b |f_\infty(x) - f_n(x)| dx$$

$$\text{se } n \text{ è abb. grande} \rightarrow \leq \int_a^b \varepsilon dx$$

$$= \varepsilon(b-a)$$

Quindi il LHS è piccolo quanto voglio pur di prendere n grande.
— o — o —

Teorema di scambio della derivata

Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni su $[a,b]$ di classe C^1 .
Supponiamo che

$$\begin{array}{ll} f_n'(x) \rightarrow g_\infty(x) & \text{uniformemente} \\ f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) & \text{uniformemente} \end{array}$$

Allora

$f_\infty(x)$ è derivabile e la sua derivata è $g_\infty(x)$
(la derivata del limite è il limite delle derivate)

Dim. Usiamo lo scambio per l'integrale

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f_\infty(x) = f_\infty(a) + \int_a^x g_\infty(t) dt & & \end{array}$$

Se derivo la seconda riga rispetto ad x ottengo $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$.
Poiché io so già che $g_\infty(x)$ è continua questo dimostra
la derivabilità di $f_\infty(x)$

Oss. Non ho usato che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente, ma solo che ci converge puntualmente.

In realtà ho usato solo che $f_n(a)$ converge a qualcosa per $n \rightarrow +\infty$. A quel p.to definisco

$$f_\infty(x) = \text{q.c.} + \int_a^x g_\infty(t) dt$$

e dimostro che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ addirittura uniformemente.

Per essere minimalisti, ho usato che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$f_n(x_0) \rightarrow \text{q.c.} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

— o — o —