

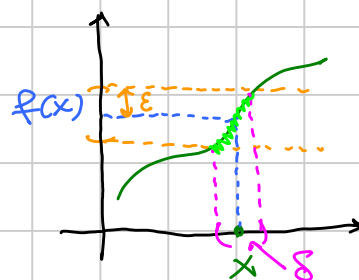
FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Si dice che $f(x)$ è continua in D se

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \cap D \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

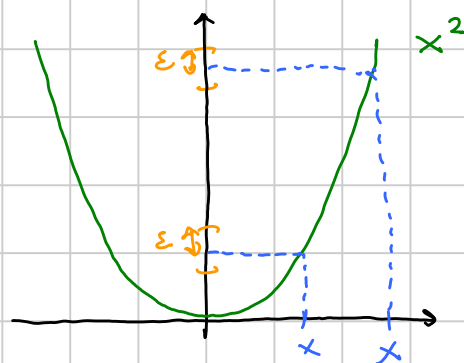
$\uparrow$
 δ dipende da
 x e da ε



Def. Si dice che $f(x)$ è uniformemente continua in D se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall x \in D \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

$\uparrow$
 δ dipende solo
da ε



Esempio $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Brutalmente: a parità di ε , se prendo
 x sempre più grande mi servi-
rà δ sempre più piccolo.

Un δ universale non c'è, quindi non è unif.
continua.

Se considero $f(x) = x^2$ su $[-100, 100]$, allora diventa unif.
continua.

Teorema (HEINE-CANTOR) Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in D e D è compatto, allora f è unif. cont. in D .

Dim. Si fa per assurdo. Quindi supponiamo che f non sia uniformemente continua.

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \quad \exists y \in [x-\delta, x+\delta] \cap D$ tali che

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$. Ottengo punti x_n e y_n tali che

$$x_n \in D, \quad y_n \in D, \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Perché D è compatto, x_n ammette una sottosuccessione convergente, diciamo

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in D$$

Ora basta osservare che

- $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$ (infatti $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{n_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$)
- $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$ e $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$ (f è continua)

Quindi $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$

$\downarrow$
0

$\Rightarrow 0 \geq \varepsilon_0$ che è assurdo.

— 0 — 0 —

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. continua in $[0, 10]$.

Eppure ha pendenza esagerata vicino a 0.

MODULI DI CONTINUITÀ

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Per ogni $r > 0$ poniamo

$$\omega(r) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : |x - y| \leq r, x \in D, y \in D \}$$

$\omega(r)$ è la massima distanza possibile tra $f(x)$ e $f(y)$ posto che x e y distano $\leq r$.

Oss. Se f è uniformemente continua in D , allora

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega(r) = 0$$

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$ prendo il δ corrispondente dato dall'unif. continuità e ho che $\omega(\delta) \leq \varepsilon$.

Oss. La funzione $\omega(r)$ è crescente ($r_1 < r_2 \Rightarrow \omega(r_1) \leq \omega(r_2)$).
Inoltre

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

stima del gap verticale in funzione del gap orizzontale.

Caso particolare Supponiamo $D = [a, b]$, supponiamo $f(x) \in C^1([a, b])$
 $\uparrow$ derivabile con derivata continua

Poniamo $L := \sup \{ |f'(x)| : x \in [a, b] \}$.

Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

$$\forall x \in [a, b]$$

$$\forall y \in [a, b]$$

Dim. Per Lagrange $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ (se $y \leq x$)
quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| \cdot |x-y| \\ \leq L |x-y|$$

Def. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

- $f(x)$ è LIPSCHITZIANA in D se esiste $L \in \mathbb{R}$ b.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x-y| \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

Oss. $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq L$

↑ coeff. angolare della retta che
passa per 2 p.ti dati del grafico)

- $f(x)$ è α -HÖLDERIANA in D con un certo esponente $\alpha \in (0,1)$ se esiste $H \in \mathbb{R}$ b.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x-y|^\alpha \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

Oss. Se una funzione è Lip. o Hölder, allora f è unif. continua.

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ $D = [0,2]$

- è unif. continua? Sì, per Heine - Cantor
- è Lip.? No, per colpa di 0
- è Hölderiana con esponente $\frac{1}{2}$ e $H=1$.

Si tratta di dimostrare che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}$$

Eleviamo al $\square$: supponendo $x \geq y$

$$\cancel{x+y} - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \stackrel{?}{\leq} \cancel{x-y}$$

$$\cancel{2y} \stackrel{?}{\leq} \cancel{2\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{y} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{x} \quad \text{OK!}$$



Oss. Il modulo di continuità dice sostanzialmente come un errore nella variabile x si ripercuote in un errore su $f(x)$

Oss. Perché non c'è l' Hölderianità con $\alpha > 1$?

Se fosse

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^2$$

vorrebbe dire che

$$f'(x) = 0 \quad \text{ovunque}$$

$$\left| \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R} \right| \leq HR.$$

— 0 — 0 —