

Liminf e limsup di funzioni

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Può essere  $x_0 \in \mathbb{R}$  oppure  $x_0 \in \{\pm\infty\}$ .

Def. (di limsup) Sia  $D \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  un p.to di accumulazione di  $D$ . Supponiamo anche  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

(1) Se per ogni  $r > 0$  si ha che

$$\sup \{ f(x) : x \in \underbrace{[x_0 - r, x_0 + r] \cap D}_{\substack{\text{intervallo di ampiezza } r \text{ intersecato } D \\ \text{tutto il p.to } x_0}} \setminus \{x_0\} \} = +\infty$$

allora per def.  $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

(2) altrimenti, detto  $S_r$  il sup scritto sopra (che ora è un numero almeno quando  $r$  è piccolo), si pone

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} S_r.$$

Liminf / limsup di funzioni stanno al limite di funzioni come  
 " " " succ. " " " " succ,  
 — 0 — 0 —

Teorema (de L'Hôpital). Per forme indeterminate del tipo  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  si ha che

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se RHS = LHS, allora è ...

# Funzioni vs Successioni

Supponiamo che  $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ . Allora

- per ogni successione  $a_n \rightarrow x_0$  e tale che  $f(a_n)$  ha limite si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq L$$

- esiste  $a_n \rightarrow x_0$  (ovviamente  $a_n \neq x_0$  e  $a_n \in D$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ) tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$$

**Dm.** (Nel caso  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $L \in \mathbb{R}$ )

Costruisco  $a_n$  con questo algoritmo

- Scegli  $a_1$  tale che  $x_0 - 1 < a_1 < x_0 + 1$  e  $a_1 \neq x_0$   
 $L - 1 < f(a_1) < L + 1$   
 $a_1 \in D$
- Scegli  $a_2$  tale che  $x_0 - \frac{1}{2} < a_2 < x_0 + \frac{1}{2}$   
 $L - \frac{1}{2} < f(a_2) < L + \frac{1}{2}$

e così via. È ovvio dalla costruzione che  $a_n \rightarrow x_0$  e  $f(a_n) \rightarrow L$ .

Basta dimostrare che ogni volta posso trovare  $a_k$ .

Infatti, dati  $\varepsilon$  ed  $\eta$ , posso sempre trovare  $x$  tale che  
vera in almeno un pto.

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon \quad x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta$$

vera in tutto l'intervallo

Questo perché se  $\eta$  è sufficientemente piccolo, il sup di  $f$  in  $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$  è vicino a  $L$

— o — o —

Come dimostro un limsup di funzioni?

① Disuguaglianza dall'alto

② Successione dal basso

Esempio  $f(x) = \cos x$ , su  $\frac{1}{x}$  che succede per  $x \rightarrow 0^+$

Dico che  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ . Infatti

①  $\cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \boxed{\cos x}$   
↓  
quindi  $\limsup \leq 1$

② Devo trovare  $a_n \rightarrow 0^+$  tale che  $f(a_n) \rightarrow 1$ ,

[Faccio in modo che  $\sin \frac{1}{a_n} = 1$ , cioè  $\frac{1}{a_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , cioè

$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$  ]. Scelgo  $a_n$  come ho appena fatto e osservo  
che  $a_n \rightarrow 0$  e  $f(a_n) = \cos a_n \rightarrow 1$ .  
— 0 — 0 —

Funzioni semicontinue Una funzione  $f(x)$  si dice

• semicontinua inferiormente (SCI) in  $x_0$  se

$$\boxed{f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

"al limite può solo crollare"

• semicontinua superiormente (SCS) in  $x_0$  se

$$\boxed{f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

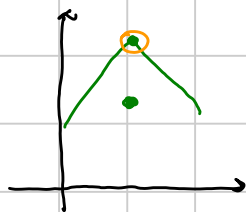
— 0 — 0 —

Teorema di Weierstrass Sia  $D \subseteq \mathbb{R}$  un insieme compatto non vuoto (limitato + chiuso). Sia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione SCI in tutti i pti di  $D$ .

Allora per forza esiste

$$\boxed{\min \{ f(x) : x \in D \}}$$

Esempio



Esiste il minimo, ma non esiste il max.

Teo. di Bolzano - Weierstrass Sia  $D$  un insieme chiuso e limitato e sia  $\{a_n\}$  una successione a valori in  $D$ .

Allora esiste una sottosuccessione che ammette limite, e tale limite sta in  $D$ .

Detto altrimenti, esistono  $a_\infty \in D$  ed esiste una succ. di interi  $n_k \rightarrow \infty$  tale che  $n_k$  è strett. cresc.

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty$$

Dim. Per ipotesi esistono  $M_1$  ed  $M_2$  t.c.

$$M_1 \leq a_n \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{perch\`e } D \text{ \u00e9 limitato})$$

Per teo. dell'ora precedente  $\liminf$  e  $\limsup$  di  $a_n$  sono numeri reali ed esiste una s.succ.  $a_{n_k}$  che tende al  $\limsup$  (e volendo un'altra che tende al  $\liminf$ ).

Poich\`e  $D$  \u00e9 chiuso, il limite sta per forza in  $D$ .

— o — o —

Dim (di W. in versione SCI)

Pongo

$$I := \inf \{ f(x) : x \in D \}$$

Ora  $I$  esiste per forza, per\u00f2 potrebbe essere  $-\infty$  oppure reale ma non essere minimo.

Di sicuro esiste una successione  $a_n \in D$  tale che

$$f(a_n) \rightarrow I \quad (\text{qui si dice successione minimizzante})$$

Questo per definizione di  $\inf$ .

Applico BW alla successione  $a_n$ . Ottengo una s.succ. convergente

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty.$$

Dico che  $a_\infty$  è il p.to di minimo cercato. Infatti

$$f(a_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = I$$

↑  
 $f$  è sc.i

↑  
perché  $f(a_n)$  ha  
limite e quindi  
 $f(a_{n_k})$  ha lo stesso  
limite

L'unica possibilità è che sia  $f(a_\infty) = I$ , quindi  $I$  è reale  
ed è proprio il minimo.

— o — o —