

Richiami di Analisi 1

- Liminf e Limsup
- Funzioni semicontinue
- Teo. di Weierstrass
- Funzioni uniformemente continue
- Moduli di continuità

LIMINF e LIMSUP Caso delle successioni $\{a_n\}$.

Idea: $a_n = (-1)^n$ questa non ha limite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

Def. (di limsup) Sia a_n una successione

(1) Se a_n non è limitata superiormente (cioè non esiste nessuna costante $M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) si pone per def.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

(2) Se a_n è limitata superiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ posso considerare

$$S_k := \sup \{a_n : n \geq k\} \in \mathbb{R}$$

e osservare che

$$S_{k+1} \leq S_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{il sup è su meno roba})$$

dunque per il teo. delle succ. monotone esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Si pone quindi $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$

— 0 — 0 —

Def. (di liminf) Data una succ. $\{a_n\}$ si pone

(1) se a_n non è lim. sup.

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

(2) se a_n è limitata inferiormente, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\sup \{a_n : n \geq k\}}_{I_k} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

I_k , che è succ.
debolmente crescente di numeri reali

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$. Allora $I_k = -1$ e $S_k = 1$ per ogni k

Esempio 2 $b_n = (-1)^n \arctan n$. Allora

$$I_k = -\frac{\pi}{2} \quad S_k = \frac{\pi}{2} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

Esempio 3 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\text{Se } k \text{ è pari, allora } I_k = \frac{-1}{k+1} \quad S_k = \frac{1}{k}$$

$$\text{Se } k \text{ è dispari, allora } I_k = -\frac{1}{k} \quad S_k = \frac{1}{k+1}$$

Si vede che $I_k \rightarrow 0$ e $S_k \rightarrow 0$.

Caratterizzazioni di liminf e limsup

(1) si ha che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n \geq M$
frequentemente (infinito volte)

(2) si ha che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente $a_n \geq l - \varepsilon$ frequentemente

(3) Si ha che $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, cioè

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ definitivamente.}$$

Caratterizzazioni analoghe valgono per il $\liminf$.

Oss. $\liminf$ e $\limsup$ esistono sempre (finiti oppure $\pm \infty$) e soddisfano

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se esiste il limite.

Teorema delle sottosuccessioni Sia a_n una successione, e sia a_{n_k} una qualunque sottosuccessione. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

In particolare, se a_n ha limite, allora LHS e RHS coincidono (left-hand side e right-hand side), quindi tutto coincide.

Teorema del confronto a due Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Teorema (Criterio rapporto $\rightarrow$ radice) Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se LHS = RHS, allora ...

$$\boxed{\text{MAXLIM} = \text{LIMSUP}}$$

$$\boxed{\text{MINLIM} = \text{LIMINF}}$$

Sia a_n una successione e sia L il limsup ($L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Allora

- esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow L$
- tutte le sottosuccessioni che hanno limite, hanno limite $\leq L$.
segue da teo. sottosuccessioni

In altri termini, L è il massimo limite possibile (maxlim) per le sottosuccessioni di a_n che ammettono limite.

Dim. (che esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow L$)

Caso $L = +\infty$ Costruisco la sottosuccessione così:

- Scelgo n_1 in maniera tale che $a_{n_1} \geq 1$
- Scelgo n_2 " " " " $a_{n_2} \geq 2$ e $n_2 > n_1$
- Scelgo n_k " " " " $a_{n_k} \geq k$ e $n_k > n_{k-1}$

gli indici per cui succede questo sono infiniti, quindi almeno uno soddisfa

Caso $L \in \mathbb{R}$ Costruisco così:

- Scelgo n_1 tale che $L-1 \leq a_{n_1} \leq L+1$
- Scelgo n_2 " " $L-\frac{1}{2} \leq a_{n_2} \leq L+\frac{1}{2}$ e $n_2 > n_1$
- Scelgo n_k " " $L-\frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq L+\frac{1}{k}$ e $n_k > n_{k-1}$

frequentemente, quindi posso trovare un indice con

Oss / esercizio Ritoccando l'algoritmo, posso fare in modo che $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$, cioè la s.succ. è monotona

Operativamente, come calcolo $\liminf$ e $\limsup$.

Per il $\limsup$ lo slogan è

- ① Disuguaglianza dall'alto
- ② Sottosuccessione dal basso

Esempio $a_n = \frac{n + (-1)^n n^2}{3n^2 + \sqrt{n}}$. Calcolare S_k è improponibile

$$\frac{n + (-1)^n n^2}{3n^2 + \sqrt{n}} \leq \boxed{\frac{n + n^2}{3n^2 + \sqrt{n}}} \quad (\text{Disuguaglianza dall'alto})$$

$\downarrow$
 $b_n \rightarrow \frac{1}{3}$

Da questo deduco che $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{1}{3}$

Conco ora una s.succ. a_{n_k} t.c. $a_{n_k} \rightarrow \frac{1}{3}$ da cui

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \frac{1}{3}$$

e quindi uguaglianza. Basta prendere $a_{n_k} = a_{2k}$.

Oss. Se anche a_n non ha limite, c'è almeno una sottosucc.
che tende al $\liminf$ e una che tende al $\limsup$.

— $\circ$ — $\circ$ —