

① $f(x) = (3 + \sin^2 x) \cos \frac{1}{x}$ $\liminf / \limsup$ a $+\infty$ e 0^-

Per $x \rightarrow +\infty$ $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

limsup • Disug. dall'alto

$$f(x) \leq 4 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 4$$

• Succ. dal basso $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

liminf • Disug. dal basso : $3 + \sin^2 x \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Per $x \geq 1$ posso moltip. conservando i versi per $\cos \frac{1}{x}$

$$(3 + \sin^2 x) \cos \frac{1}{x} \geq 3 \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \geq 1$$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 3$$

• Succ. dall'alto : $x_n = \pi n$

Idem per $x \rightarrow 0^+$

limsup $\cos \frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \neq 0$

Molt. per $3 + \sin^2 x$ che è ≥ 0

$$f(x) \leq 3 + \sin^2 x \quad \text{da cui} \quad \limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq 3$$

— 0 — 0 —

(2)

$$f(x) = \sum \boxed{\frac{1}{n + n^3 x^6}}_{f_n(x)}$$

Conv. puntuale $x=0$ $\rightarrow \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$x \neq 0$ conv. asint. con $\sum \frac{1}{n^3}$

Conv. totale in $[A, +\infty)$ con $A > 0$

$$\sup_{x \geq A} f_n(x) = \frac{1}{n + n^3 A^3}$$

$$\sum \sup < +\infty \Rightarrow \text{conv. totale} \Rightarrow \text{conv. unif. in } [A, +\infty)$$

$\Rightarrow$ continuità del limite + teorema di scambio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

garantisce anche f continua in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$,
quindi f continua in $(0, +\infty)$

$$f'_n(x) = - \frac{6n^3 x^5}{(n + n^3 x^6)^2}$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq A} |f'_n(x)| &= \sup_{x \geq A} \frac{6n^3 x^5}{(n + n^3 x^6)^2} \leq \sup_{x \geq A} \frac{6n^3 x^5}{n^6 x^{12}} \\ &= \sup_{x \geq A} \frac{6}{n^3 x^7} = \frac{6}{n^3 A^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \sup |f'_n(x)| < +\infty &\Rightarrow \text{conv. tot.} \Rightarrow \text{conv. unif.} \\ &\Rightarrow f \text{ derivabile in } [A, +\infty) \\ &\text{per ogni } A > 0 \\ &\Rightarrow f \text{ derivabile in } x > 0 \end{aligned}$$

Funzione pari $\Rightarrow$ idem in $x < 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non posso usare thm. di scambio.

$S_n(x)$ = somme parziali

$$f(x) \geq S_n(x) \quad \forall x \quad \forall n$$

$$\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 0} S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \forall n$$

↑
è un limite su una
somma finita

quindi

$$\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

— o — o —

Oss. $|f'_n(x)| = \frac{6n^3 x^5}{(n + n^3 x^6)^2}$

Posso prendere $x \in [A, B]$ e dire $(A > 0)$

$$\sup_{x \in [A, B]} |f'_n(x)| \leq \frac{6n^3 B^5}{(n + n^3 A^6)^2} \sim \frac{1}{n^3}$$

$\sum \sup < +\infty \Rightarrow$ conv. tot. e unif in $[A, B]$

$\Rightarrow$ deriv. in $[A, B]$

— o — o —

$$(3) \quad F(u) = \int_0^3 [\ddot{u} + u + x]^2 dx \quad u(3) = 0$$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_0^3 [\ddot{u} + t\ddot{v} + u + tv + x]^2 dx \\ &= \int_0^3 [(\ddot{u} + u + x) + t(\ddot{v} + v)]^2 dx = \dots \end{aligned}$$

... in alternativa $[\varphi \ddot{u}]' = \varphi u$

$$\cancel{2} (\ddot{u} + u + x)' = \cancel{2} (\ddot{u} + u + x)$$

$$\ddot{u} + \cancel{\ddot{u}} + 1 = \cancel{\ddot{u}} + u + x$$

$$\ddot{u} - u = x - 1$$

Condizioni al bordo: $\begin{cases} u(3) = 0 \\ \ddot{u}(0) + u(0) = 0 \end{cases}$

vauno giustificate
spiegando come
scegliere v

$$u(x) = ae^x + be^{-x} + 1 - x$$

trovo a e b e ho la solutione.

Resta da dim. che è unica ed è minimo.

Ogni altra w da sciro come $u + v = w$ spiegando come è fatta v

$$F(w) = F(u) + \text{eq. eulero in forma I} + \int_0^3 (\ddot{v} + v)^2 dx$$

$$\geq F(u) \quad \text{quindi } u \text{ è minimo.}$$

Se ce ne fosse un altro dovrebbe essere $\int_0^3 (\ddot{v} + v)^2 dx = 0$,
cioè

$$\ddot{v} + v = 0 \quad \ddot{v} = -v$$

cioè $v(x) = ae^{-x}$ ma poiché $v(3) = 0$, allora $a = 0$,
quindi $v(x) = 0$,

Oss. Non si può dedurre l'unicità del p.to di minimo dall'unicità della sol. dell'eq. di Eulero.

Infatti solo i p.ti di min. di classe C^2 sono obbligati a risolvere Eulero. Potrebbero esserci p.ti di min. che sono solo C^1 .

Il ragionamento con $w = u + v$ li esclude.

$$(4) \quad \int_0^1 [\ddot{u}^2 + \dot{u}^2 + 5xu] dx = F(u)$$

1ª forma di Eulero ...

$$\int_0^1 [2\ddot{u} \ddot{v} + 2\dot{u} \dot{v} + 5xv] dx = 0$$

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \\ \dot{v}(0) &= \dot{v}(1) \end{aligned}$$

Integro per parti ...

$$\int_0^1 \underbrace{[2u^{(4)} - 2\ddot{u} + 5x]}_{=0} v dx + [2\dot{u} \dot{v} - 2\ddot{u} v + 2\dot{u} v]_0^1$$

$$2u^{(4)} - 2\ddot{u} + 5x = 0$$

$$u'''(1) = u'(1) \quad \left. \begin{array}{l} u'''(1) = u'(1) \\ u''(0) = u''(1) \end{array} \right\} \text{Nuove date}$$

$$u''(0) = u''(1)$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = u'(1)$$

dall' inizio

$$(b) \quad F(u) \geq F(u+v) = F(u) + \underbrace{\text{Eq. Eulero}}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 \ddot{v}^2 + \dot{v}^2 dx}_{\geq 0} \geq F(u)$$

(c) $F(u)$ con unica condizione $u'(0) = 2$

Basta prendere $u(x) = 2x - w$ e ottergo $F(u)$ molto negativo.

Quindi $\inf = -\infty$.

— 0 — 0 —