

Scuola Superiore di Studi Universitari e di Perfezionamento S. Anna
Esame di Complementi di Analisi Matematica II
Pisa, 13 Aprile 2015

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = (3 + \sin^2 x) \cos \frac{1}{x}.$$

Calcolare $\liminf$ e $\limsup$ di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 0^-$.

2. Consideriamo la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^3 x^6}.$$

- (a) Determinare per quali valori reali di x si ha convergenza puntuale.
- (b) Dimostrare che la funzione $f(x)$, dove è definita, è continua e derivabile.
- (c) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

3. Consideriamo il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^3 [\dot{u} + u + x]^2 dx : u \in C^1([0, 3]), u(3) = 0 \right\}.$$

- (a) Determinare l'equazione di Eulero associata al problema e le relative condizioni al bordo.
- (b) Determinare se il problema di minimo ha soluzione e in caso affermativo determinare se il punto di minimo è unico.

4. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 [\ddot{u}^2 + \dot{u}^2 + 5xu] dx$$

ed il problema di minimo

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0, 1]), u(0) = 0, u'(0) = u'(1) \}.$$

- (a) Determinare l'equazione di Eulero associata al problema e le relative condizioni al bordo.
- (b) Dando per buono che l'equazione di Eulero ha soluzione (unica), dimostrare che si tratta di un punto di minimo.
- (c) Studiare il problema di minimo per $F(u)$ tra tutte le funzioni $u \in C^2([0, 1])$ tali che $u'(0) = 2$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.