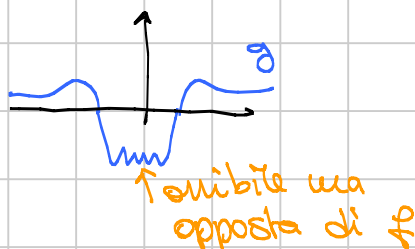
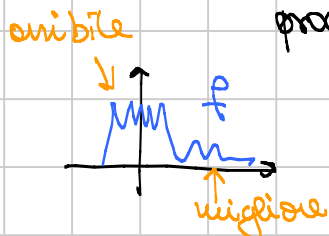


Osservazioni sulla formula risolutiva per l'eq. delle onde in $\mathbb{R}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

- ① Regolarità: è vero che per $t > 0$ la soluzione è molto più regolare di $u_0(x)$ ed $u_1(x)$? NO: basta pensare ad una travelling wave, che non migliora risp. al dato iniziale. Rispetto ad u_1 c'è un po' di miglioramento: se $u_0 \in C^{27}$ e $u_1 \in C^{26}$, la soluzione risulta C^{27} (u_0 non migliora, u_1 migliora di 1 livello)

- ② Peggioramento: per $t > 0$ la soluzione può peggiorare rispetto ad u_0 . Basta pensare a 2 travelling waves con 2 tratti onibitoli opposti che si compensano per $t=0$ e poi procedono in direzioni diverse



- ③ Soluzioni in un senso molto border line

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Anche se f e g sono per esempio solo continue posso comunque dire che è una soluzione, anche se non in senso classico

Esercizio L'equazione del calore in $\mathbb{R}$ ammette delle traveling waves?

$u_t = u_{xx}$ Una traveling wave sarebbe una soluzione del tipo
 $u(x,t) = f(x+ct)$

$$u_t(x,t) = c f'(x+ct) \quad u_x(x,t) = f'(x+ct) \quad u_{xx}(x,t) = f''(x+ct)$$

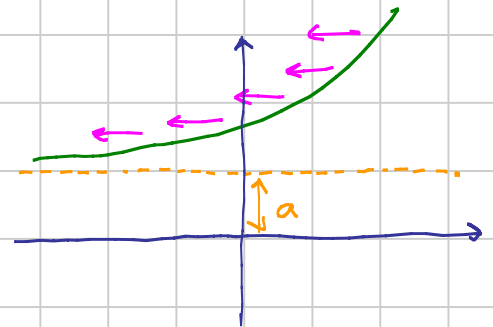
Quindi otteniamo $c f'(x+ct) = f''(x+ct)$, cioè $f'' = c f'$.

Le soluzioni di questa sono

$$f(y) = a + b e^{cy}$$

da cui

$$u(x,t) = a + b e^{c(x+ct)}$$



— o — o —

Eq. delle onde su un intervallo

$$u_{tt} = u_{xx}$$

PDE

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u_t(x,0) = u_1(x)$$

} cond. iniziali

$$u(a,t) = u(b,t) = 0 \quad \text{Dirichlet (oppure N,P, D-N)}$$

Queste si trattano con le serie di Fourier relative a quelle condizioni al bordo

$\{e_n(x)\}$ base Hilbertiana

$$[e_n(x)]_{xx} = -\lambda_n^2 e_n(x)$$

↑ autovalori

Cerco $u(t,x)$ del tipo

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) e_k(x)$$

$$u_{tt}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k''(t) e_k(x)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) (-\lambda_k)^2 e_k(x)$$

Uguagliando i coeff. trovo

$$u_k''(t) = -\lambda_k^2 u_k(t)$$

Questa ha come sol.

$$u_k(t) = a_k \cos(\lambda_k t) + b_k \sin(\lambda_k t)$$

dove a_k e b_k dipendono dalle condizioni iniziali

$$u_k(0) = u_{0k}$$

$$u'_k(0) = u_{1k}$$

dove $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e_k(x)$

↑
comp. di F.
di $u_0(x)$

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k} e_k(x)$$

↑
comp. di F.
di $u_1(x)$

Ricaviamo a_k e b_k

$$a_k = u_{0k}$$

$$\leftarrow u_k(0) = u_{0k}$$

$$a_k = u_{0k}$$

$$\lambda_k b_k = u_{1k}$$

$$\leftarrow u'_k(0) = u_{1k}$$

$$b_k = \frac{u_{1k}}{\lambda_k}$$

In conclusione

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_{0k} \cos(\lambda_k t) + \frac{u_{1k}}{\lambda_k} \sin(\lambda_k t) \right) e_k(x)$$

↑
a loro volta
 $\sin(kx) / \cos(kx)$

Domanda principale: ma la serie converge? e in quale senso converge?

A) sono 2 pezzi

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} \cos(\lambda_k t) \cdot e_k(x)$$

Fatto gen. $\sum a_k e_k$ conv.

$$\Leftrightarrow \sum a_k^2 < +\infty$$

In questo caso la serie converge in H , che poi è L^2 se e solo se

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}^2 \cos^2(\lambda_k t)$$

Ora sappiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$ (sono i coeff. di $u_0(x)$), quindi
no problem per ogni $t \geq 0$ e anche per ogni $t \in \mathbb{R}$

Per l'altro termine, mi serve la convergenza di

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{1k}^2}{\lambda_k^2} \sin^2(\lambda_k t)$$

Ora $\sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}^2 < +\infty$ (sono i coeff. di $u_1(x)$), quindi no problem per ogni $t \geq 0$ e ogni $t \in \mathbb{R}$ (i λ_k aiutano)

REVERSIBILITÀ L'eq. delle onde si può risolvere indifferente per $t \geq 0$ e per $t \leq 0$. Non solo:

→ risolvere per tempi $t \leq 0$ con dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$ è come risolvere per $t \geq 0$ con dati iniziali $u_0(x)$ e $-u_1(x)$.

Osservazione Se voglio che la serie nell'espressione di $u(x,t)$ converga, basta che

$$\rightarrow \sum u_{0k}^2 < +\infty \quad \text{cioè} \quad u_0 \in L^2((a,b))$$

$$\rightarrow \sum \frac{u_{1k}^2}{\lambda_k^2} < +\infty \quad \text{cioè} \quad u_1 \in H^{-1}((a,b))$$

(su $u_1(x)$ basta chiedere un livello di regolarità in meno risp. ad $u_0(x)$)

Di solito le scelte classiche sono $u_0 \in H^1$ e $u_1 \in L^2$. Queste garantiscono che la serie di $u(x,t)$ converge e anche la serie di $u_t(x,t)$ converge.

$$u_t(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{-\lambda_k u_{0k} \sin(\lambda_k t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{converge se } \sum \lambda_k^2 u_{0k}^2 < +\infty \\ \text{cioè } u_0 \in H^1}} + \cancel{\lambda_k} \frac{u_{1k}}{\cancel{\lambda_k}} \cos(\lambda_k t) \right) e_k(x)$$

$\downarrow$
converge se $\sum u_{1k}^2 < +\infty$
cioè se $u_1 \in L^2$

IDENTITÀ DELL'ENERGIA

Per una sol. dell'eq. delle onde
con dato $u_0 \in H^1$ e $u_1 \in L^2$ si ha

$$\int_a^b [u_t(x,t)]^2 dx + \int_a^b [u_x(x,t)]^2 dx = \text{costante}$$

↑ ↑
energia cinetica energia elastica

Chiamiamo $E(t)$ la somma dei 2 termini. Allora

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_a^b 2u_t u_{tt} dx + \int_a^b 2u_x u_{xt} dx \\ &= 2 \int_a^b u_t \underbrace{u_{tt}}_{\text{derivato}} dx + 2 [u_x u_t]_a^b - 2 \int_a^b \underbrace{u_{xx}}_{\text{integrato}} u_t dx \\ &= 2 [u_x(b,t) u_t(b,t) - u_x(a,t) u_t(a,t)] \end{aligned}$$

uguali

Se al bordo ho Neumann, le due u_x sono 0 e viene 0.

Negli estremi in cui ho Dirichlet, anche non omogeneo, cioè del tipo $u(a,t) = \text{costante}$, si annullano i termini con u_t .
Analogo nel periodico.

In ogni caso $E'(t) = 0$.

Questo è l'analogo di $\dot{u}^2 + u^2 = \text{costante}$ per eq. del tipo
 $\ddot{u} = -u$

— o — o —

