

EQUAZIONE DELLE ONDE

$$u_{tt} = u_{xx}$$

Dimensione $n=1$

$$u_{tt} = \Delta u$$

Dimensione $n \geq 2$

Due approcci ↗ Equazione su tutto $\mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R}$)
 ↘ Equazione in un intervallo ($x \in [a, b]$)
 In questo caso ci sono le condizioni al bordo

Ci sono sempre 2 condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{posizione}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{velocità}$$

Più in generale l'eq. si scrive nella forma

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

dove $c > 0$ è un parametro.Eq. su tutto $\mathbb{R}$ Devo trovare una sol. del tipo $u(x, t)$.

Cerco invece una soluzione del tipo

$$u(x, t) = v(\underbrace{x+ct}_{\xi}, \underbrace{x-ct}_{\eta})$$

per una opportuna funzione $v(\xi, \eta)$. Vediamo cosa deve succedere

$$u_x(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi(x+ct, x-ct) + v_\eta(\dots, \dots)$$

$$u_{xx}(x, t) = v_{\xi\xi} \xi_x + v_{\xi\eta} \eta_x + v_{\eta\xi} \xi_x + v_{\eta\eta} \eta_x = \boxed{v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta} = u_{xx}}$$

$$u_t = v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = c v_\xi - c v_\eta = c(v_\xi - v_\eta)$$

$$u_{tt} = c(v_{\xi\xi} \xi_t + v_{\xi\eta} \eta_t - v_{\eta\xi} \xi_t - v_{\eta\eta} \eta_t)$$

$$= c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}$$

$$\boxed{u_{tt} = c^2(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 2v_{\xi\eta})}$$

Se impongo che $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ trova $\boxed{v_{\xi\eta} = 0}$

Riassumendo: se $v(\xi, \eta)$ risolve $v_{\xi\eta} = 0$, allora
 $u(x, t) = u(x+ct, x-ct)$ risolve $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

Ora le soluzioni di $v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$\boxed{v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)}$$

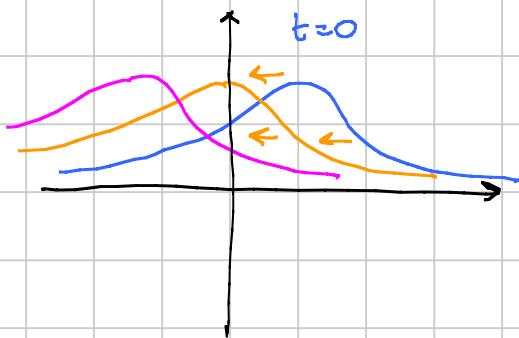
Dim. Se $(v_{\xi})_{\eta} = 0 \Rightarrow v_{\xi}(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \Rightarrow v = f(\xi) + g(\eta)$
← primitiva di φ

Conclusione le soluzioni dell'eq. delle onde su tutto $\mathbb{R}$ sono del tipo

$$\boxed{u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

per una opportuna scelta di f e g .

Come è fatta $f(x+ct)$?



È una TRAVELING WAVE: il profilo è sempre lo stesso, e trasla a sx man mano che il tempo cresce con velocità c .

Analogamente: $g(x-ct)$ è una traveling wave che va verso dx con velocità c .

Quindi su tutto $\mathbb{R}$ ogni soluzione dell'eq. delle onde è la sovrapposizione di 2 traveling waves.

Per determinare f e g , uso le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) : f(x) + g(x) = u_0(x)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) : c f'(x) - c g'(x) = u_1(x)$$

piccolo dubbio: una
quale primitiva?

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} u_1(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} u_1(x) \right) \quad g(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} u_1(x) \right)$$

quindi la soluzione, in funzione dei dati iniziali, è

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x+ct) + \frac{1}{c} u_1(x+ct)) + \frac{1}{2} (u_0(x-ct) - \frac{1}{c} u_1(x-ct))$$

$$= \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} [u_1(x+ct) - u_1(x-ct)]$$

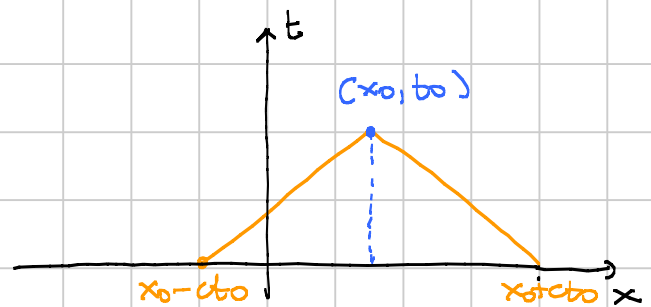
$$= \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

Formula finale per la soluzione

Questo ci dice che il
conto non dipende
dalla scelta della
primitiva.

DOMINIO DI DIPENDENZA

Da cosa dipende il valore di u
nel punto (x_0, t_0) ?

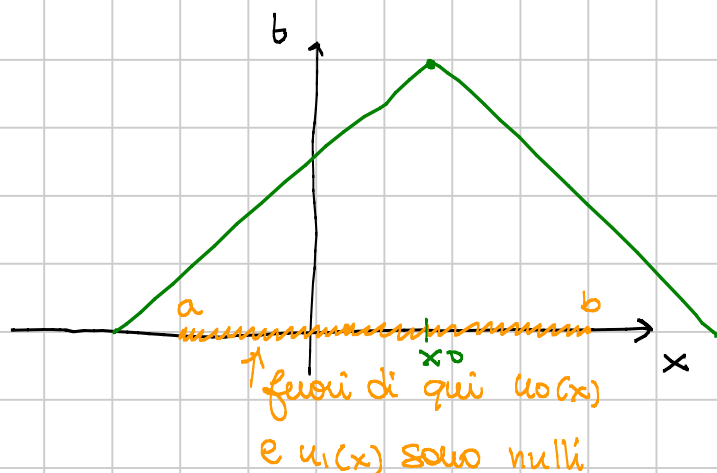
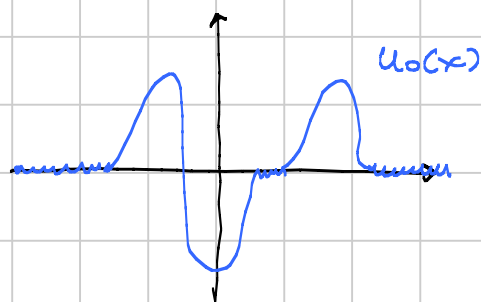


① Di $u_0(x)$ contano solo i valori che aveva in $x_0 + ct_0$ e $x_0 - ct_0$

② Di $u_1(x)$ contano i valori nell'intero intervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$

Tutto il resto di $u_0(x)$ ed $u_1(x)$ non conta nulla, perché "non fa
tempo" ad arrivare in x_0 al tempo t_0 .

Supponiamo che i dati iniziali abbiano supporto compatto, cioè che siano nulli al di fuori di un intervallo



Fissato un qualunque punto x_0 , pur di prendere t abbastanza grande, si ha che

$$\frac{1}{2} [u_0(x_0 + ct) + u_0(x_0 - ct)] = 0 + 0 = 0$$

L'altro termine dà come contributo

$$\frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct}^{x_0 + ct} u_1(s) ds = \frac{1}{2c} \int_a^b u_1(s) ds \quad \text{perché } [x_0 - ct, x_0 + ct] \text{ ricade tutto } [a, b]$$

In particolare, se fosse $u_1(x) \equiv 0$, allora dopo un po' $u(x_0, t) = 0$, cioè l'onda è passata e x_0 torna in quiete.

— 0 — 0 —

In dimensione $n > 1$ ci sono formule analoghe, ma più complicate. Comunque, il valore di $u(x_0, t_0)$ dipende solo dai valori

↑
vettore di $\mathbb{R}^n$

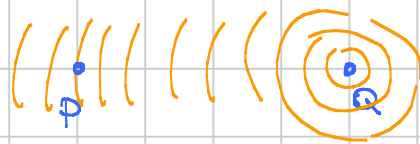
di $u_0(x)$ e $u_1(x)$ nella palla con centro in x_0 e raggio ct_0 .
C'è una differenza fra dim. PARI e DISPARI:

→ in dim. PARI la dipendenza è da tutta la palla

→ in dim. DISPARI la dipendenza è solo dalla superficie della palla

Praticamente, in 3 variabili, se in Q ci sono le casse, lui sta in P sente quello che è stato prodotto di Q ad un tempo presente $t-c$.

$$c \Delta t = PQ$$



In dimensione 2, se lancio un sasso in Q , la perturbazione prima o poi arriva in P e non se ne va più, cioè resta sempre una traccia.

