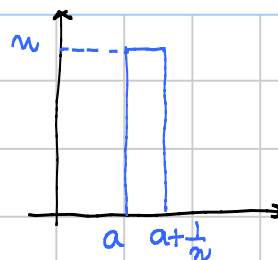
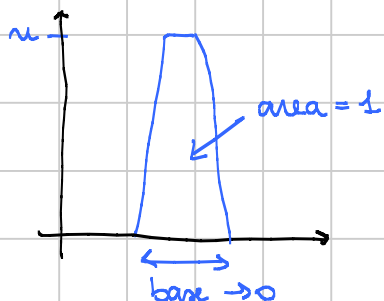
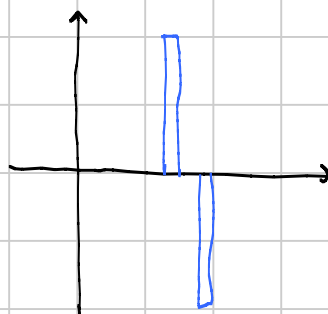


Delta di Dirac Limite di

una anche limite di "trapezi"



La sua derivata è limite di oggetti



"Due dette opposte enormi nello stesso punto"

Cosa fa (supponiamo $a \in (0,1)$)

$$\int_0^1 f(x) \delta_a(x) dx = f(a) \quad \text{se } f \text{ è continua}$$

$$= \int_a^{a+\frac{1}{n}} n f(x) dx = f(a)$$

$\sim f(a)$

$$\int_0^1 f(x) \delta'_a(x) dx \stackrel{\text{per parti}}{=} - \int_0^1 f'(x) \delta_a(x) dx = -f'(a)$$

$\uparrow$ derivata di $\delta_a(x)$

GRADIENT FLOW

Prendo una soluzione di $u_t = u_{xx}$ con D al bordo

$$E(t) = \text{energia} = \int_0^\pi u^2(x,t) dx = \text{quadrato della norma } L^2 \text{ della soluzione al tempo } t$$

Calcolo $E'(t)$

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^\pi u^2(x,t) dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} u^2(x,t) dx \\
&= 2 \int_0^\pi u(x,t) u_t(x,t) dx \\
&= 2 \int_0^\pi u(x,t) u_{xx}(x,t) dx \quad \text{integrazione per parti} \\
&= -2 \int_0^\pi u_x^2(x,t) dx + 2 \underbrace{\left[u(x,t) u_x(x,t) \right]_0^\pi}_{=0 \text{ per motivi di casi nei casi } D, N, P} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Questo ci dice che l'energia decresce lungo le soluzioni, cioè al crescere di t .

— o — o —

$$F(t) = \int_0^\pi u(x,t) dx = \text{calore totale della sbarretta}$$

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \int_0^\pi u_t(x,t) dx = \int_0^\pi u_{xx}(x,t) dx \\
&= \left[u_x(x,t) \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= u_x(\pi, t) - u_x(0, t)
\end{aligned}$$

Nel caso Neumann o nel caso periodico si ottiene $F'(t) = 0$, cioè $F(t) = \text{costante}$.

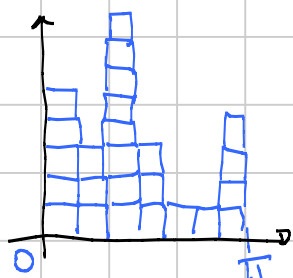
Fisicamente

- condizioni N = non esce calore dal bordo
- condizioni P = quello che esce da un estremo rientra dall'altro

Nel caso Dirichlet non si può dire nulla su $F'(t)$. In questo caso il calore può entrare o uscire dal bordo
— o — o —

Interpretazione statistica dell'eq. del calore.

Pensiamo al dato iniziale $u_0(x)$ come una distribuzione di casse uguali. Ogni funzione si appross in questo modo per di usare dati piccoli.



- Ad ogni passo temporale, per ogni cassa tiro a sorte z e spostarla di una posit a dx o sx
- continuo in questo modo e ottengo nuove funzioni ai tempi $t_1, 2t_1, 3t_1, 4t_1, 5t_1$

Se gioco bene il passo spaziale e quello temporale, quello che ottengo è la soluzione dell'eq. del calore

Le condizioni al bordo intervengono per le casse al bordo

- Neumann: le casse al bordo non posso uscire, quindi il numero di casse resta costante
- Dirichlet: le casse al bordo possono uscire, una una volta fuori vengono eliminate.
— o — o —

Domanda: come risolvo l'eq. del calore se al bordo ho condizioni di D. non nulle?

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \times t \geq 0 \\ u(0, t) = 3, \quad u(\pi, t) = 5 \\ \text{dato iniziale} \end{cases}$$

Tutti i discorsi fatti con le serie di Fourier richiedono operatore lineare, simmetrico, compatto... che richiede dati nulli.

- Oss. ① Le funzioni $u(x,t) \equiv \text{costante}$ risolvono l'eq. del calore
② Le funzioni $u(x,t) = ax+b$ risolvono pure.

Nell'esempio mi basta trovare una retta che vale 3 in 0 e 5 in π

$$3 + \frac{2}{\pi} x \quad \text{e pone} \quad v(x,t) = u(x,t) - 3 - \frac{2}{\pi} x$$

Allora $v_t = u_t = u_{xx} = v_{xx}$

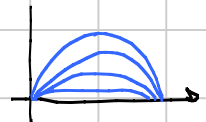
Quindi mi basta risolvere $v_t = v_{xx}$ con $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$
e la corrispondente cond. iniziale

$$v(x,0) = u(x,0) - 3 - \frac{2}{\pi} x = u_0(x) - 3 - \frac{2}{\pi} x.$$

In generale: se ho condizioni di D. o di N. non omogenee
(tranne nel caso di due Neumann diverse) posso
sempre aggiustare con una retta opportuna.
— o —

Altre soluzioni speciali Su un intervallo solo quelle del tipo

$$u(x,t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}$$



Come si dimostra che tutte le soluzioni tendono a 0?

Si sfruttano gli esponenziali $e^{-k^2 t}$

$$\left| \sum u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx) \right| \leq \sum |u_{0k}| e^{-k^2 t} \leq M \sum e^{-k^2 t}$$

È vero che la somma di una serie di funzioni che tendono a 0
tende a sua volta a 0? In generale no, ma sì se la convergenza
è uniforme, e in questo caso lo è !!

Perché nel caso N. tendono ad una costante? Perché il primo termine
della serie è $\cos(0x)$ e quello ha davanti e^{-0t}