

Eq. del calore

$$u_t = u_{xx} \quad x \in [0,1], t \geq 0$$

PDE

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{Dato iniziale}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{Dato al bordo (D in questo caso)}$$

Prendo $e_n(x)$ la serie di Fourier con le cond. al bordo date.

Cerco una soluzione del tipo

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) e_k(x)$$

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k0} e_k(x)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(t) e_k(x)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \underbrace{(-\lambda_k)}_{\text{numeri negativi}} e_k(x)$$

Uguagliando i coeff. otteniamo

$$u'_k(t) = -\lambda_k u_k(t)$$

$$u_k(0) = u_{k0}$$

da cui $u_k(t) = u_{k0} e^{-\lambda_k t}$ e quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k0} e^{-\lambda_k t} e_k(x)$$

REGOLARITÀ

A priori la somma di serie di F. è nota in L^2 , ma qui vorremmo di meglio, cioè l'esistenza di u_t e u_{xx} , o per lo meno la continuità per dare un senso alle condizioni al bordo.

Per l'eq. del calore c'è l'effetto regolarizzante: anche se $u_0(x)$ è solo L^2 , per tutti i tempi $t > 0$ la funzione $x \rightarrow u(x,t)$ è molto regolare, addirittura C^∞ nell'intervallo

Prendiamo l'esempio Dirichlet nell'intervallo $[0, \pi]$ in modo che $e_k(x) = \sin(kx)$ e quindi $\lambda_k = -k^2$. Allora

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Cosa posso dire di u_{0k} ? $\|u_0(x)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$ se il dato iniziale $u_0(x) \in L^2(0, \pi)$

Ma allora $u_{0k} \rightarrow 0$ perché la serie converge, quindi u_{0k} è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$|u_{0k}| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esamino la convergenza totale della serie a t fissato

[Fatto generale: sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni definite in $[a, b]$

Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} \sup\{|f_k(x)| : x \in [a, b]\} < +\infty$. Allora la serie di numeri

serie iniziale converge uniformemente. In particolare, se tutte le $f_k(x)$ sono continue, anche la somma della serie è continua]

Calcolo $\sup_{x \in [0, \pi]} |u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kt)| \leq \sup_{x \in [0, \pi]} |u_{0k}| \cdot e^{-k^2 t} \cdot 1 \leq M e^{-k^2 t}$

Quindi $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in [0, \pi]} \dots \leq M \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 t} < +\infty$ alla grande

Quindi a t fissato la serie converge unif., dunque il limite è continuo
↑
somma della serie

Per conquistare la derivabilità, faccio la stessa cosa con la serie delle derivate.

[Fatto generale: sia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni in $[a,b]$

Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ converga uniformemente ad una certa $g(x)$.

Allora $f(x)$ è derivabile e $f'(x) = g(x)$]

Per dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$, fissato $t > 0$, è una

funzione C^1 nella variabile x , basta dim. la convergenza unif. della serie delle derivate, quindi di

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-k^2 t} k \cos(kx)$$

Per dim. la convergenza uniforme, dim. la conv. totale, cioè facc'o

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |u_k e^{-k^2 t} k \cos(kx)| \leq |u_k| \cdot k e^{-k^2 t} \leq M k e^{-k^2 t}$$

$$\text{Quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \sup -- \leq M \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k^2 t} < +\infty$$

quindi c'è conv. unif. e quindi la somma è C^1 in $[0, \pi]$.

Procedendo per induzione si dimostra che la somma è C^∞ in $[0, \pi]$, non appena $t > 0$.

Per ottenere regolarità rispetto al tempo bisogna fare conti analoghi, ma rispetto alla variabile t .

Nota bene; il $(-k^2)$ che scende derivando una volta rispetto a t è lo stesso che scende derivando 2 volte rispetto ad x ($u_t = u_{xx}$)

IRREVERSIBILITÀ

L'equazione del calore si risolve benissimo in AVANTI ($t \geq 0$), ma malissimo INDIETRO ($t \leq 0$).

Infatti la formula è la stessa $\sum u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kt)$

↑ per tempi $t < 0$ rende la convergenza molto problematica

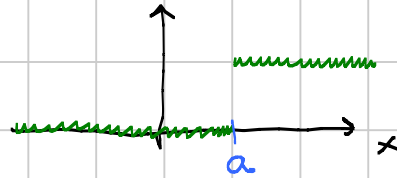
Morale: posso risolvere per $t < 0$ solo se i coeff. u_{0k} del dato per $t=0$ sono molto decadenti, del tipo $u_{0k} \sim e^{-k^3}$, cioè solo se il dato iniziale è estremamente regolare.

BORDER LINE

Posso risolvere l'eq. del calore per $t \geq 0$ anche con dati iniziali pessimi, stile Deltte di Dirac,

Folklore: $\delta_a(x) =$ "funzione" che vale 0 ovunque tranne in a dove vale $+\infty$ ed il suo integrale vale 1.

La sua primitiva si capisce



Quindi la δ è la derivata di una funzione che non è derivabile in senso classico, MA la primitiva ha una serie di Fourier normale

$$\sum u_{0k} \sin(kx)$$

Allora la sua derivata, cioè la δ , avrà serie

$$\sum k u_{0k} \cos(kx)$$

Il "problema" è che la serie non converge, ma se la uso come dato iniziale per il calore ottengo

$$\sum_k u_0 e^{-k^2 t} \cos(kx)$$

e questa per $t > 0$ converge senza problemi per via di $e^{-k^2 t}$.

MORALE Consideriamo serie del tipo

$$f = \sum a_k e_k(x)$$

$$f \in L^2 \Leftrightarrow \sum a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^1 \Leftrightarrow \sum k^2 a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^{28} \Leftrightarrow \sum k^{56} a_k^2 < +\infty$$

$\vdots$

$$f \in H^{-1} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{k^2} a_k^2 < +\infty \quad \leftarrow \delta \text{ sta in questo spazio}$$

$$f \in H^{-2} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{k^4} a_k^2 < +\infty$$

Questi spazi H^{-n} sono gli spazi delle DISTRIBUZIONI di ordine n , cioè moralmente derivate n -esime di funzioni L^2 .

Tutti questi "oggetti" vanno bene come dati iniziali per l'eq. del calore.

La delta si può vedere come limite di cose del tipo

