

**PROBLEMI DI EVOLUZIONE**

↪ Equazioni alle derivate parziali

- Equazione del calore
- Equazione delle onde

**EQUAZIONE DEL CALORE**

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

$$t \geq 0$$

$$x \in [0,1]$$

$[0,1]$  è una sbarretta, ad esempio metallica

$u(x,t)$  = temperatura nel p.to  $x$  della sbarra al tempo  $t$   
(stessa cosa con  $u(x,y,z,t)$  e  $(x,y,z) \in$  insieme di  $\mathbb{R}^3$ )

$$u_t = u_{xx}$$

Equazione

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$\forall x \in [0,1]$$

Condizione iniziale: dare il valore  
di  $u$  per  $t=0$  ↑  
tutti i valori

$$u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0 \quad \leftarrow$$

Condizioni al bordo (qui di tipo D,  
ma potrebbero essere N o P o miste)

Problema : ① Equazione

② Condizioni al bordo

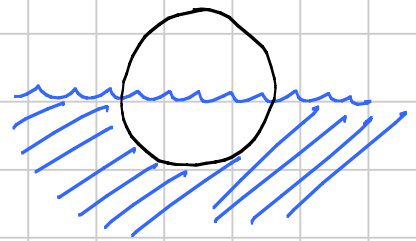
③ Condizioni iniziali

In più dimensioni spaziali

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(x,t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

temperatura del cocomero  $\Omega$  tenuto in  
frigo a  $0^\circ$ .

Cocomero semi-immerso in acqua



$$u_t = \Delta u$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \leftarrow \text{temp. iniziale}$$

$$u(x, t) = \text{temp. acqua } t \geq 0, x \in \text{bordo sommerso}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 \text{ sul bordo emerso (dove non impongo cond., nasce N')}$$

— o — o —

### EQUAZIONE DELLE ONDE

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{posizione iniziale}$$

$$u_t(0, x) = u_1(x) \quad \text{velocità iniziale}$$

$$u(0, t) = u(1, t) \quad \text{condiz. D al bordo}$$

— o — o —

### Trattazione matematica

L'incognita SAREBBE una funzione  $u(x, t)$  di 2 variabili.

Invece conviene vederla come una funzione della sola  $t$  che ad ogni  $t \geq 0$  associa una funzione della variabile  $x$

$$u: \underbrace{[0, +\infty)}_{\text{tempi}} \longrightarrow X$$

$\uparrow$  spazio di funzioni della variabile  $x$  (su un intervallo, un cubo, ...)

— o — o —

### EQUAZIONE DEL CALORE

Calco la soluzione come  $u: [0, +\infty) \rightarrow L^2((0, 1))$

Per ogni  $t \geq 0$ , scrivo la serie di Fourier di  $u(t)$ , scegliendo quella con le condizioni al bordo che ho.

### Esempio

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Dirichlet  $\rightarrow$  serie con  $\sin(nx)$

coeff. al tempo  $t$

Posso scrivere

$$u(t, x) = [u(t)](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{u_k(t)}_{\text{coeff. al tempo } t} \sin(kx)$$

Si spera che accada che

$$u_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \sin(kx)$$

$$u_{xx}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2) u_k(t) \sin(kx)$$

Le due serie devono essere uguali, ma allora i coeff. devono essere uguali, da cui

$$u'_k(t) = -k^2 u_k(t) \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

MORALE: una PDE (eq. deriv. parziali) è diventata una successione di ODE (eq. diff. ordinarie)

Qual è la condizione iniziale delle ODE? Deve succedere che

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin(kx) = u_0(x)$$

Quindi  $u_k(0)$  = coeff. dello sviluppo in serie di Fourier di  $u_0(x)$ .

Se scrivo

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin(kx)$$

allora

$$u_k(0) = u_{0k} \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

da cui

$$u_k(t) = u_{0k} e^{-k^2 t} \quad \text{e quindi}$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Formula per la soluzione della PDE

coeff. della cond. iniz.

Le cond. al bordo hanno det. il tipo di serie di F. utilizzata.

Esempio

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \leftarrow \text{in fuga a } 0 \text{ gradi} \\ u(x, 0) = 1 \quad \leftarrow \text{temp. 1 all'inizio} \end{cases}$$

Come risolvo? ① Scrivo 1 in serie di soli seni

② Uso la formula

①  $1 = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin(kx)$

$$u_{0k} = \frac{\langle 1, \sin(kx) \rangle}{\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle}$$

$$\langle 1, \sin(kx) \rangle = \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{k} \int_0^{k\pi} \sin(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle = \frac{\pi}{2}$$

Quindi  $u_{0k} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$

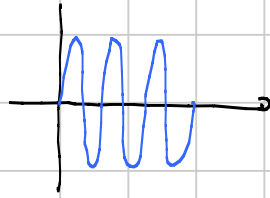
$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

Quindi la sol. dell'eq. del calore è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left( e^{-t} \sin x + \frac{1}{3} e^{-9t} \sin(3x) + \frac{1}{5} e^{-25t} \sin(5x) + \dots \right) \end{aligned}$$

Dal p.to di vista pratico: le componenti più alte vengono abbattute molto più in fretta, quindi una somma parziale è una buona approx della sol.

Brutale: le componenti più elevate, corrispondono ad autofunzioni molto oscillanti



← caldo e freddo a  
contatto ravvicinato

⇒ si annullano a  
vicenda in fretta.