

Serie di Fourier in più dimensioni

Insieme un rettangolo (quadrato) in $\mathbb{R}^2$: $[0, \pi] \times [0, \pi]$
 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

Cerco autovalori ed autovettori (autofunzioni) del Laplaciano, o meglio dell'operatore che inverte il Laplaciano

Data $f \rightsquigarrow \Delta u = f$ + condizioni al bordo (D, N, P, miste)

Dico che autofunzioni sul quadrato sono prodotti di autofunzioni su un intervallo, quindi robe del tipo

$$u_{n,m}(x) = \sin(nx) \sin(my) \quad (\text{caso D})$$

$$\Delta u_{n,m}(x) = (u_{n,m})_{xx} + (u_{n,m})_{yy}$$

$$= -n^2 u_{n,m} - m^2 u_{n,m} = -(n^2 + m^2) u_{n,m}(x, y)$$

quindi l'autore corrispondente è $-(n^2 + m^2)$ se pensato come autor. del Laplaciano, o meglio $-\frac{1}{n^2 + m^2}$ come autor. dell'inverso.

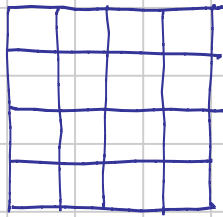
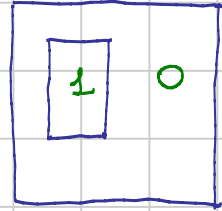
Questo non esclude che ce ne siano altri (in realtà non ci sono). Dimostro che ogni funzione $u \in L^2$ (quadrato) si scrive nella forma

$$\sum_{n,m} a_{n,m} u_{n,m}(x, y)$$

o meglio dimostro che quelle somme sono dense, cioè ogni funzione in L^2 (quadrato) si approssima in norma L^2 con una somma finita di quelle.

Dim. Idea fondamentale: basta saper approssimare le funzioni del tipo.

Infatti, se so bene quelle, so bene tutte le funzioni costanti a scacchiera
(valori diversi in caselle diverse)



e con queste a sua volta approssimo tutto

Secondo passo: ogni funzione 0/1 come sopra è prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y , le quali sono del tipo 0/1.

Ora le prime e le seconde si approx con comb. lineari di $\sin(mx)$ e $\sin(my)$ le seconde (serie di F. in una variabile).

Moltiplicando ottengo la tesi (e così nascono i termini misti).

— o — o —

ALGORITHM JPEG → vedi WIKI in inglese

Immagine: $n \times m$ pixel. In ogni pixel ci sono 3 numeri (RGB)

→ 3 matrici $n \times m$ (ogni el. è intero da 0 a 255)

Facciamo finta che sia 1 sola matrice $n \times m$ (B-N)

1° passo: si divide la matrice in sottomatrici 8×8 .

Problema → comprimere matrici 8×8 .

Strategie di compressione:

- trasmettere 1 casella su 4
- passare da scala 0-255 a scala 0-15
- cercare di meglio

Matrici $8 \times 8 =$ sp. vett. di dim 64.

La base canonica è data dalle 64 matrici con un 1 e gli altri 0.

Idea: cercare una base migliore

Si cercano matrici i cui elementi sono del tipo

$$\cos\left(\frac{\pi}{16} n (2k+1)\right) \cos\left(\frac{\pi}{16} m (2R+1)\right) = a_{R,k}$$

$a_{R,k}$ è l'elemento di posizione (R,k) in una delle matrici della nuova base. Gli indici m ed n descrivono la base, come gli $u_{m,n}$ di prima.

È un po' come sul quadrato considerare le funzioni del tipo

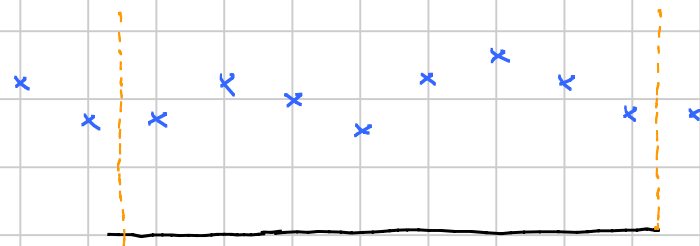
$$\cos(nx) \cos(my)$$

Sul quadrato x e y variano da 0 a lato quadrato.

Nella matrice (quadrato discreto) R e k variano da 0 a 7,
— 0 — 0 —

Questi coseni sono gli autovalori dell'analogo discreto della derivata seconda

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$$



Derivata 1ª $\leadsto u_{n+1} - u_n$

Derivata 2ª $\leadsto u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$ $\leftarrow$ problemi negli estremi

Brutalmente
$$\frac{f(x+R) + f(x-R) - 2f(x)}{R^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} f''(x)$$

si risolvono
estendendo il vettore
"riflettendo" agli
estremi

Scoperta: i vettori del tipo $\cos\left(\frac{\pi}{16} n (2k+1)\right)$ sono autovettori della derivata 2ª discreta
 $\uparrow$
 $k = 0, \dots, 7$

Questo arriva dalle formule trigonometriche

$$\begin{aligned}u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k &= \cos(\alpha(2k+3)) + \cos(\alpha(2k-1)) - 2\cos(\alpha(2k+1)) \\&= 2\cos(\alpha(2k+1))\cos(\alpha) - 2\cos(\alpha(2k+1)) \\&= \underbrace{(2\cos\alpha - 2)}_{\text{autovalore}} u_k\end{aligned}$$

Esercizio Dimostrare direttamente che sono una base ortogonale.

Laplaciano discreto definito sulle matrici

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad u_{k,r} \quad \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$u_{k,r} \rightarrow u_{k+1,r} + u_{k-1,r} + u_{k,r+1} + u_{k,r-1} - 4u_{k,r}$$