

Domanda: se conosco la serie di Fourier di $f(x)$, come è fatta la s.d.F. di $f'(x)$.

Prendiamo il tipo ④ in $[0, 2\pi]$, quindi

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Brutalmente $f'(x) = -\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos(kx)$

Sotto opportune ipotesi, questa è vera

$$a_k = \frac{1}{|\cos(kx)|^2} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$\uparrow$ norma

$$= - \int_0^{2\pi} f'(x) \frac{1}{k} \sin(kx) dx + \underbrace{\left[f(x) \frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi}}_{=0}$$

$$= - \frac{1}{k} \underbrace{\int_0^{2\pi} f'(x) \sin(kx) dx}_{\text{coeff. di } \sin(kx) \text{ nello sviluppo di } f'(x)}$$

Questo giustifica quanto ottenuto sopra.

OSSERVAZIONE Per fare il passaggio di sopra basta sapere che $f \in H^1((0, 2\pi))$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = (\text{circa}) \sum (a_k^2 + b_k^2)$$

$\uparrow$
la base è solo ortogonale, quindi c'è una costante di differenza

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \text{circa } \sum (k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2)$$

MORALE Data una base Hilbertiana costituita da una delle 4 serie di F. si ha

$$f \in L^2 \Leftrightarrow \sum a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^1 \Leftrightarrow \sum k^2 a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^{27} \Leftrightarrow \sum k^{54} a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^\pi \Leftrightarrow \sum k^{2\pi} a_k^2 < +\infty$$

Calcolo delle variazioni in 2 variabili $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$\min \left\{ \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + (u(x) - \underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \text{Data}}})^2 dx}_{F(u)} \right\}$$

Stile cose

$$\frac{1}{t} (F(u+tv) - F(u)) = \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla u + t \nabla v|^2 + ((u+tv) - f)^2 - F(u)$$

$$= \frac{1}{t} \int_{\Omega} \cancel{|\nabla u|^2} + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \cancel{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}$$

$$+ \frac{1}{t} \int_{\Omega} \cancel{u^2 + t^2 v^2 + f^2 - 2uf - 2tvf + 2tuv} dx$$

$$- \frac{1}{t} \int_{\Omega} \cancel{u^2 + f^2 - 2uf}$$

$$= 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx - 2 \int_{\Omega} f v + 2 \int_{\Omega} u v + \underbrace{t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + v^2}_{\downarrow 0}$$

La prima forma dell'eq. di Eulero è

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \int_{\Omega} (u - f) v dx$$

1^a forma dell'eq. di Eulero

Come integro $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx$ per parti?

Gauss-Green !!!

$$(G-G-1) \quad \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx$$

$\uparrow$
normale esterna
a Ω

(G-G-2: teorema della divergenza) Dato vettore $\vec{G}$ si ha

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{G} dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{G}, \vec{n} \rangle ds$$



(G-G-1) $\Rightarrow$ (G-G-2) basta prendere $f \equiv 1$

(G-G-2) $\Rightarrow$ (G-G-1) basta prendere $\vec{G} = f \vec{E}$. Allora

$$\operatorname{div} \vec{G} = \operatorname{div} (f \vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

— o — o —

Usando (G-G-1)

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle ds - \int_{\Omega} v \operatorname{div} (\nabla u)$$

$\langle \vec{E}, \nabla f \rangle \quad f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle$

Ora $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, quindi

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} v \Delta u + \underbrace{\int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle ds}_{\text{Questo si annulla, per esempio, se } v \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega}$$

Questo si annulla, per esempio, se $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$

Quindi nel caso Dirichlet, il termine di bordo se ne va e resta

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v dx$$

2^a forma dell'eq. di Eulero

Lemma DBR $\Rightarrow -\Delta u + u - f = 0$, cioè

$$\Delta u = u - f$$

eq. di Eulero in forma diff.

Dove una volta c'erano le derivate seconde, ora c'è il Laplaciano.

Non è più un'eq. diff. ordinaria (derivata parziale risp. ad una variabile), ma è un'eq. diff. alle DERIVATE PARZIALI (PDE)

$$u_{xx} + u_{yy} = u - f \quad \text{con eventualmente } D : u(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \in \partial\Omega$$

Se all'inizio non avessi messo cond. al bordo, usavo comunque le v nulle al bordo per mandare via il termine di bordo e ottenere $\Delta u = u - f$.

Poi tornando in Eulero ottengo

$$\int_{\Omega} \underbrace{(-\Delta u + u - f)}_0 v dx = \pm \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\langle \nabla u, \vec{n} \rangle}_{\text{deve essere 0}} ds$$

per l'Eq. di Eulero ricavata con v nulle al bordo

$$\Rightarrow \langle \nabla u, \vec{n} \rangle = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

↑
deriv. dir.

Conclusione: la condizione di Neumann in più variabili diventa

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

Condizioni miste: se impongo D solo su un pezzo di $\partial\Omega$,
trovo N sul resto del bordo di Ω .

— o — o —