

Serie di Fourier di 4 tipi

$$\textcircled{1} \text{ (D-D)} \quad \sin(mx) \quad [0, \pi] \quad \sin\left(\frac{\pi}{M}mx\right) \quad [0, M]$$

$$\textcircled{2} \text{ (N-N)} \quad \cos(mx) \quad [0, \pi] \quad \cos\left(\frac{\pi}{M}mx\right) \quad [0, M]$$

$$\textcircled{3} \text{ (D-N)} \quad \sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right) \quad [0, \pi] \quad \sin\left(\frac{\pi}{M}\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right) \quad [0, M]$$

$$\textcircled{4} \text{ (P)} \quad \sin(mx) \text{ e } \cos(mx) \quad [0, 2\pi]$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{M}mx\right) \text{ e } \cos\left(\frac{2\pi}{M}mx\right) \quad [0, M]$$

Tutte queste 4 sono basi ORTOGONALI di L^2 (intervallo) e anche basi Hilbertiane (autovettori della "doppia primitiva" con le cond. al bordo)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{f_k(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{autofunzioni}}}$$

dove i coeff. sono dati da

$$a_k := \int_{\text{Int.}} f(x) \cdot f_k(x) dx = \frac{1}{\int_{\text{Int.}} f_k(x)^2 dx}$$

Domanda: in che senso converge la serie? Dette $S_m(x)$ le somme parziali, in che senso $S_m(x) \rightarrow f(x)$.

Prima risposta: nel senso L^2 del termine, cioè

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{\text{Int.}} |f(x) - S_m(x)|^2 dx}_{|f_m - f|^2} = 0$$

Vediamo qualcosa di più puntuale.

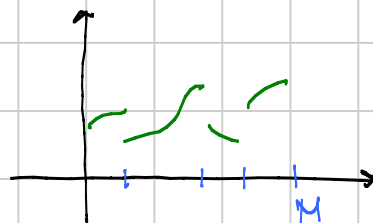
Brutta notizia: può succedere che $f(x)$ è continua, ma in qualche punto $S_n(x) \not\rightarrow f(x)$.

Quindi la continuità non assicura la conv. puntuale

Bella notizia: sia $f(x)$ di classe C^1 a tratti, cioè l'intervallo è suddiviso in sotto int. in cui $f(x)$ è C^1 . In particolare c'è al più un # finito di punti di discontinuità, e in ciascuno di essi $f(x)$ e $f'(x)$ hanno il limite da dx e da sx (magari diversi).

Estendo $f(x)$ a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (così si conserva il C^1 a tratti).

Allora valgono 2 teoremi.



Teorema 1 (convergenza puntuale) Per ogni f come sopra si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{2} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite} \\ \text{destro}}}{f(x+)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite} \\ \text{sinistro}}}{f(x-)} \right)$$

In particolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$ in tutti i pti x in cui f è continua

Teorema 2 (convergenza uniforme) Per ogni f come sopra e continua la convergenza è uniforme.

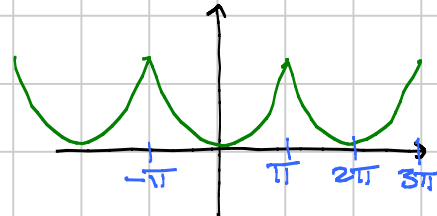
Oss. $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi]$, ripetuta poi con periodicità, è una funzione per cui vale il teorema 2.

Esercizio Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$,
ripetuta con periodicità. La sviluppo
come serie di Fourier di tipo (P)

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)}$$



Questi non ci sono perché
 f è pari: vedi formula per i
coefficienti

$$a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{|1|^2} =$$

$$\langle f(x), 1 \rangle = a_0 \langle 1, 1 \rangle + \text{tutti } 0$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{\langle f(x), \cos(kx) \rangle}{|\cos(kx)|^2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx =$$

$$\left[\frac{2}{k} x^2 \sin(kx) + \frac{4}{k^2} x \cos(kx) - \frac{4}{k^3} \sin(kx) \right]_0^{\pi} = \frac{4}{k^2} \pi (-1)^k$$

$$F(x) = a x^2 \sin(kx) + b x \cos(kx) + c \sin(kx)$$

$$F'(x) = \underbrace{2a x \sin(kx)} + \underbrace{ka x^2 \cos(kx)} + b \cos(kx) - \underbrace{kb x \sin(kx)} + kc \cos(kx)$$

$$ka = 2$$

$$2a = kb$$

$$b = -kc$$

$$a = \frac{2}{k}$$

$$b = \frac{2}{k} a = \frac{4}{k^2}$$

$$c = -\frac{b}{k} = -\frac{4}{k^3}$$

$$\begin{aligned}
 |\cos(kx)|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)^2 dx & y=kx & \quad dy=k dx \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \cos(kx)^2 dx = 2 \int_0^{k\pi} \cos(y)^2 \frac{1}{k} dy \\
 &= 2 \frac{1}{k} \int_0^{k\pi} \cos(y)^2 dy = \frac{2}{k} \cdot \frac{k\pi}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

Da questi conti, se sono giusti, si ottiene

$$a_k = \frac{4}{k^2} \pi (-1)^k \cdot \frac{1}{\pi} = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

Di conseguenza

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pongo $x = \pi$ e ottengo

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ (-1)^k \end{matrix}$

da cui

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

— 0 — 0 —

Osservazione Allo stesso modo si ottengono formule per $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ dove a è intero pari.

Esercizio Dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96}$

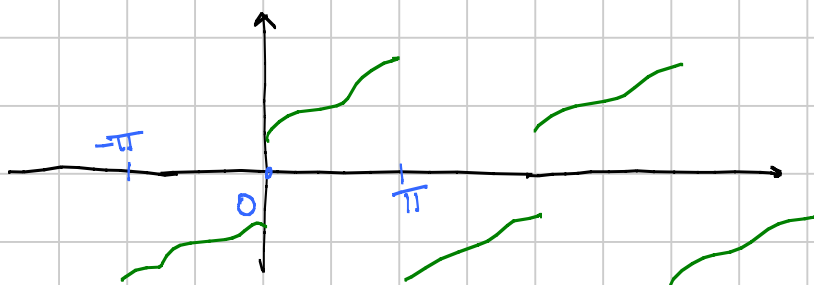
— 0 — 0 —

$\nearrow$ se non sbaglio

Rapporti tra serie di tipo ①, ②, ③, ④

① vs ④
↑
D-D ↑
P

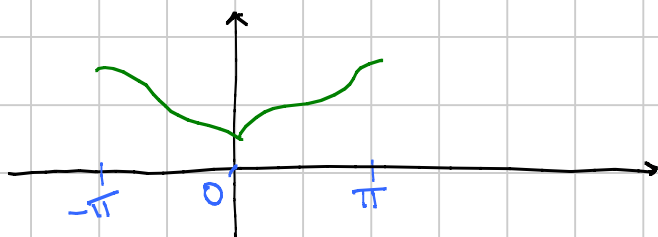
Sia $f(x)$ su $[0, \pi]$ $\rightsquigarrow$ posso sviluppare di tipo ①
 $\rightsquigarrow$ posso estendere a $[-\pi, \pi]$
per disparità e sviluppare di
tipo ④



Lo sviluppo di tipo ④ sarà
di soli seni perché è
dispari e i coeff. sono gli
stessi (vedere la formula
e semplificare un 2)

Quindi: serie di tipo ① = serie di tipo ④ per l'estensione dispari

Analogamente: serie di tipo ② = serie di tipo ④ per l'estensione pari



e ripeto per periodicità

Per il tipo ③ faccio

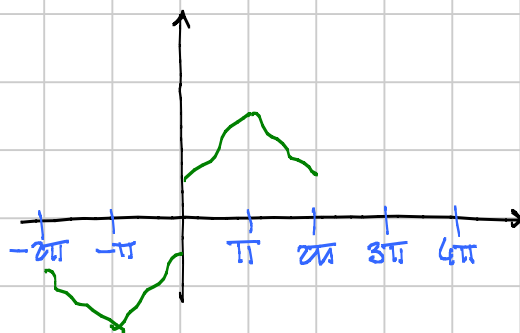
→ prima estensione su $[\pi, 2\pi]$

per "parità",

→ poi estensione per disparità

a $[-2\pi, 2\pi]$

→ infine sviluppo come funzione 4π periodica che quindi avrà
 $\sin\left(n \frac{x}{2}\right)$. Si vede poi che restano solo i termini con
 n dispari (fare il conto)



Conseguenza: posso applicare Teo 1 e Teo 2 anche ai tipi ①, ②, ③,
tenendo conto delle discontinuità create dall'estensione