

(D-D) $Af =$ doppia primitiva con $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$

Dal teorema spettrale sappiamo che esiste una base Hilbertiana formata da funzioni con $\hat{F} = \lambda f$, cioè autovettori.

Mi piacerebbe avere della regolarità in modo da fare 2 derivare a dx e sx. Però f è solo L^2 . Guadagno regolarità con bootstrap.

$$f \in L^2 \rightsquigarrow F \in C^0 \text{ (anzi } \frac{1}{2}\text{-Hölder)} \rightsquigarrow \hat{F} \in C^1 \rightsquigarrow f = \frac{1}{\lambda} \hat{F} \in C^1$$

$$\rightsquigarrow F \in C^2 \rightsquigarrow \hat{F} \in C^3 \text{ e così via. Quindi è tutto } C^\infty.$$

Allora derivo 2 volte e ottengo $(\hat{F})'' = \lambda f''$, cioè

$$f = \lambda f'', \text{ cioè } f'' = \frac{1}{\lambda} f. \text{ Chi sono le possibili } f?$$

Per semplicità supponiamo $(a,b) = (0,M)$

- Se $\lambda > 0$ le soluzioni sono del tipo $f(x) = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x}$

Impongo (D-D) e ottengo $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 e^{\frac{M}{\sqrt{\lambda}}} + c_2 e^{-\frac{M}{\sqrt{\lambda}}} = 0$

Questo sistema ha solo la sol. banale $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ niente autovettori.

- Se $\lambda < 0$ le sol. sono del tipo $f(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right)$

Impongo (D-D) e ottengo $c_1 = 0$, $c_1 \cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$

Quindi esiste una solus. $\neq 0$ se e solo se $\sin\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$,

cioè se e solo se $\frac{M}{\sqrt{-\lambda}} = n\pi$, cioè se e solo se

$$\frac{M}{n\pi} = \sqrt{-\lambda}, \text{ cioè } \boxed{\lambda = -\frac{M^2}{n^2\pi^2}}$$

Quindi gli autovettori di A sono del tipo $-\frac{M^2}{n^2\pi^2}$ (e infatti tendono a 0), e i corrispondenti autovettori, cioè la base, sono del tipo

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{M} x\right)$$

Oss. Nel caso $M = \pi$ gli autovettori sono del tipo $\sin(nx)$
— 0 — 0 —

(D-N) Come prima mi riduco a $f'' = \frac{1}{x} f$ ora con (D-N)

• se $\lambda > 0$ $f(x) = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x}$

$$(D) \quad c_1 + c_2 = 0 \quad (N) \quad \frac{c_1}{\sqrt{\lambda}} e^{\dots} - \frac{c_2}{\sqrt{\lambda}} e^{\dots} = 0$$

e non ha soluzione

• se $\lambda < 0$ $f(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right)$

$$(D) \quad c_1 = 0 \quad (N) \quad c_1 \cdot \text{roba} + c_2 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} M\right) = 0$$

0

Quindi per avere soluzioni non nulla serve e basta

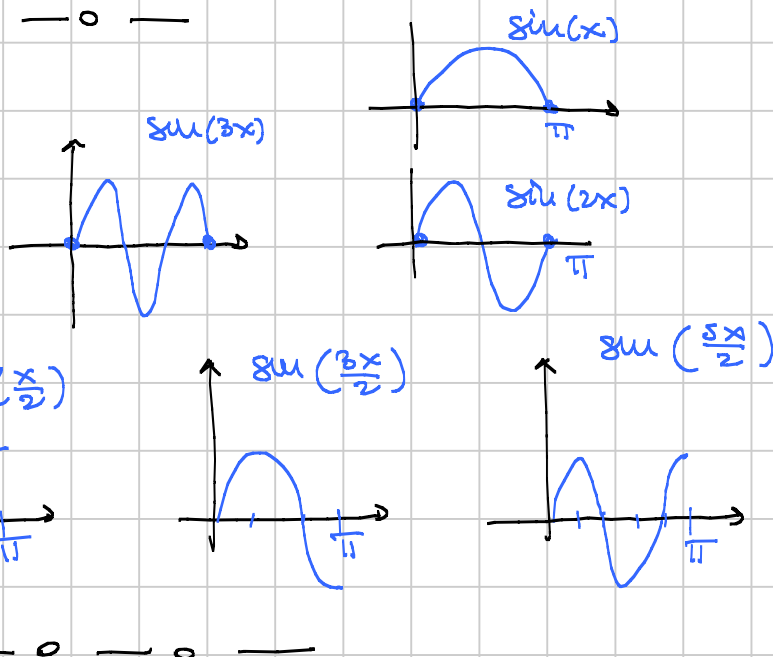
$$\cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{M}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2M}{\pi} \frac{1}{(2n+1)} = \sqrt{-\lambda} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4M^2}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

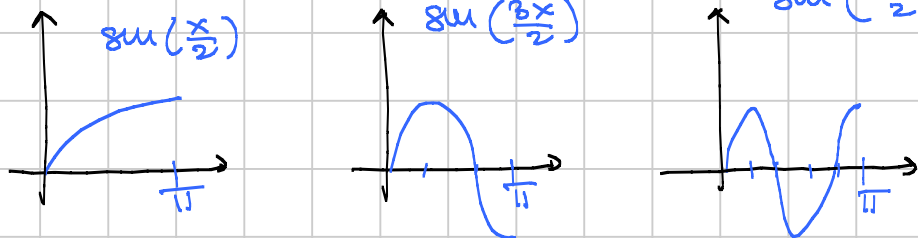
e gli autovettori sono $\sin\left(\frac{\pi}{2M} (2n+1)x\right)$

Nel caso $M = \pi$ resta $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$

Disegno Nel caso (D-D)



Nel caso (D-N)



Osservo Quelli scritti sono ortogonali, ma non auto-normalizzati, quindi serve normalizzarli.
Perché sono ortogonali?

- Motivo colto: sono autovettori di autovalori distinti
- Motivo terra-terra: analisi 1, ad esempio

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

↓
si calcola con formule product to sum $\frac{1}{2}(\cos(\dots) \pm \cos(\dots))$

Il fatto che siano basi Hilbertiane ci dice, per esempio, che ogni $f \in L^2((0, \pi))$ si scrive in modo unico come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad (\text{Uso base di tipo D-D})$$

oppure come

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

Come trovo i coefficienti? Facendo i prodotti scalari!

Nel 1° caso:

$$\langle f(x), \sin(mx) \rangle = a_n \langle \sin(mx), \sin(mx) \rangle$$

$$= a_n \int_0^\pi \sin^2(mx) dx \quad mx = y \quad m dx = dy$$

$$= a_n \int_0^{m\pi} \sin^2(y) \frac{1}{m} dy = a_n \frac{1}{m} \frac{m\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(mx) dx$$

(P) Ancora una volta devo risolvere $f'' = \frac{1}{\lambda} f$
con condizioni al bordo periodiche

• $\lambda > 0$ nessuna soluzione: verificare

• $\lambda < 0$ $f(x) = c_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$

$$f(0) = f(M) : c_1 = c_1 \cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right)$$

$$f'(0) = f'(M) : \frac{c_2}{\sqrt{-\lambda}} = -\frac{c_1}{\sqrt{-\lambda}} \sin\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \frac{c_2}{\sqrt{-\lambda}} \cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right)$$

Se impongo che il determinante sia = 0, trovo le soluzioni del tipo

$$\cos\left(\frac{2\pi}{M} mx\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{M} mx\right) \quad \text{con autovalori} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{4\pi^2}{M^2} m^2$$

Nel caso $M = 2\pi$ ottengo $\cos(mx)$ e $\sin(mx)$

(nota che questi hanno media nulla su $(0, M)$)

Conseguenza: ogni funzione in $L^2((0, 2\pi))$ si scrive in modo unico come

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

è la media della funzione

$$a_0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$\langle f(x), \cos(nx) \rangle = a_n \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle$$

$$= a_n \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = a_n \int_0^{2n\pi} \cos^2(y) \frac{1}{n} dy$$

$$= a_n \cdot \frac{1}{n} \cdot n\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

— o — o —

Per ogni funzione $f \in L^2(a, b)$ abbiamo 4 possibili sviluppi in Serie di Fourier, a seconda del set di condizioni al bordo prescelto (D-D, D-N, N-N, P).

Le serie convergono (ad oggi) solo in L^2 .