

SERIE DI FOURIER

Teorema spettrale Sia H sp. di Hilbert separabile. Sia $A: H \rightarrow H$ un'applicazione lineare simmetrica ($\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ per ogni x, y in H) e compatta (se $x_n \rightarrow x_\infty$ debole, allora $Ax_n \rightarrow Ax_\infty$ forte, eventualmente a meno di sottosuccessioni).

Allora esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$ di H fatta da autovettori di A , cioè

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
— o — o —

Nelle applicazioni $H = L^2((a, b))$ con $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Esempio classico di appl. lineare compatta: primitiva

$$(Af)(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall f \in L^2((a, b))$$

Ad ogni $f \in L^2$, l'applicazione associa la primitiva che fa 0 in a . Ovviamente Af è una funzione di $L^2((a, b))$, anzi una funzione continua.

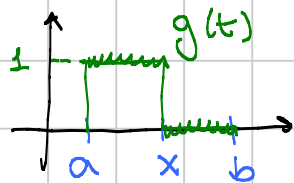
È ovvio che A è lineare.

È facile vedere che A è compatto. Sia infatti $\{f_n\}$ una succ. di funzioni che converge debolmente, cioè $f_n \rightarrow f_\infty$.

Siano F_n e F_∞ le primitive con $F_n(a) = F_\infty(a) = 0$. Dico che $F_n \rightarrow F_\infty$. Vediamo intanto che $F_n(x) \rightarrow F_\infty(x)$ per ogni x . Infatti

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^b f_n(t) \cdot g(t) dt = \langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f_\infty, g \rangle = F_\infty(x)$$

dove



D'altra parte, si può rendere più quantitativo il discorso

$$F_\infty(x) - F_n(x) = \int_a^x (f_\infty(t) - f_n(t)) dt = \int_a^b (f_\infty(t) - f_n(t)) g(t) dt$$

e quindi

$$= \langle f_\infty - f_n, g \rangle$$

$$|F_\infty(x) - F_n(x)| = |\langle f_\infty - f_n, g \rangle| \leq |f_\infty - f_n| \cdot |g|$$

$\uparrow$
C.S.

$\downarrow$
non so che questo
tende a 0.

$$|F_n(x)| = \left| \int_a^x f_n(t) dt \right| = |\langle f_n, g \rangle| \leq |f_n| \cdot |g|$$

$\uparrow$
C.S.

$$\leq K \cdot |b-a|^{1/2}$$

$\uparrow$
perché $|f_n|$ sono
equilimitate

Quindi le funzioni $F_n(x)$ sono equicontinue ed equilimitate, dunque per il solito A.A. convergono, a meno di sottosuccessioni, a qualcosa. La convergenza data da A.A. è uniforme, quindi il limite è per forza F_∞ , al quale sappiamo che c'è conv. puntuale.

— o — o —

Oss. La primitiva è lineare, compatta, ma non simmetrica...
Infatti mi servirebbe

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = \langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle = \int_a^b f(x) G(x) dx$$

e questa è una integrazione per parti con segno sbagliato e senza termini di bordo, quindi è facile trovare un controesempio.

— o — o —

Esempio vero $Af = f$ due volte la primitiva di f con due condizioni al bordo

$$f(x) \rightsquigarrow \int_a^x f(t) dt = F(x) \rightsquigarrow \int_a^x F(t) dt = \hat{F}(x)$$

la "doppia primitiva"

Tutte le altre "doppie primitive" sono del tipo $\hat{F}(x) + C_1 x + C_2$.

La $\hat{F}(x)$ ha condizioni

$$\hat{F}(a) = 0 \quad \text{e} \quad \hat{F}'(a) = 0$$

A questo punto possiamo scegliere tra varie condizioni

- | | |
|------------|--|
| (1) D-D | $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$ |
| (2) Cauchy | $\hat{F}(a) = \hat{F}'(a) = 0$ (stessa cosa in b) |
| (3) N-N | $\hat{F}'(a) = \hat{F}(b) = 0$ |
| (4) D-N | $\hat{F}(a) = 0 \quad \hat{F}'(b) = 0$ (stessa se scambio a, b) |
| (5) P | $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) \quad \text{e} \quad \hat{F}'(a) = \hat{F}'(b)$ |

Occhio: le condizioni omogenee ($=0$) garantiscono che si tratta di una applic. lineare.

Si tratta di applicazioni simmetriche?

$$\langle Af, g \rangle \stackrel{?}{=} \langle f, Ag \rangle$$

$$\int_a^b \hat{F}(x) g(x) dx = - \int_a^b F(x) G(x) dx + [\hat{F}(x) G(x)]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x) \hat{G}(x) dx \oplus [F(x) \hat{G}(x)]_a^b +$$

$$= \langle f, Ag \rangle \oplus \hat{F}(b) G(b) \ominus \hat{F}(a) G(a) +$$

$$+ F(b) \hat{G}(b) - F(a) \hat{G}(a)$$

segui conetti
dopo video

Quando si annullano i termini di bordo?

SI : D-D , N-N , D-N , P

NO : Cauchy,

Quindi nei 4 casi si abbiamo un'appl. lin. simm. e compatta.

Perché compatta? Se $f_n \rightarrow f_\infty$, allora $F_n \rightarrow F_\infty$ unif. (a meno di sottosucc.), quindi $\hat{F}_n \rightarrow \hat{F}_\infty$ unif. (dunque in L^2 forte).

Vediamo se si riesce a realizzare la "doppia primitiva" con le condizioni imposte. Sia $\hat{F}$ quella Cauchy (prodotta dagli integrali)

$$\begin{array}{l} \text{(D-D)} \quad \hat{F}(a) + c_1 a + c_2 = 0 \\ \hat{F}(b) + c_1 b + c_2 = 0 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} a c_1 + c_2 = 0 \\ b c_1 + c_2 = -\hat{F}(b) \end{array}} \\ b \neq a, \text{ quindi insolubile}$$

$$\begin{array}{l} \text{(D-N)} \quad \hat{F}(a) + c_1 a + c_2 = 0 \\ \hat{F}'(b) + c_1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leadsto \text{trovo } c_1 \\ \text{trovo } c_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(N-N)} \quad \hat{F}'(a) + c_1 = 0 \\ \hat{F}'(b) + c_1 = 0 \end{array} \quad \leadsto c_1 = 0 \leadsto \text{risolvibile se e solo se}$$
$$0 = \hat{F}'(b) = F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

Conseguenza: (N-N) risolubile se e solo se f ha media nulla.

$$\text{(Periodico)} \quad \hat{F}(a) + c_1 a + \cancel{c_2} = \hat{F}(b) + c_1 b + \cancel{c_2} \quad \leadsto c_1 \text{ si trova}$$

$$\hat{F}'(a) + \cancel{c_1} = \hat{F}'(b) + \cancel{c_1}$$

0 0 quindi f deve essere a media nulla

— 0 — 0 —

Riassumendo:

- (D-D) e (D-N) vanno sempre bene
- Cauchy non dà applicazione simmetrica
- (P) e (N-N) richiedono che f sia a media nulla

e richiedono una ulteriore condizione per dare un'applicazione ben definita. Questa condizione è che il risultato abbia media nulla

Conclusione

- ① Nei casi (D-D) e (D-N) o (N-D) la doppia primitiva definisce una appl. lin. e simmetrica e compatta

$$A: L^2(a,b) \rightarrow L^2(a,b)$$

- ② Nei casi (N-N) e (P) ho la stessa cosa, ma

$$A: L^2_{m=0}(a,b) \rightarrow L^2_{m=0}(a,b)$$

↑
funzioni L^2 a media nulla

Senza imporre la media nulla in anticipo per determinare c_2 .

— o — o —