

Quoziente di Rayleigh $Q(v) = \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$

Oss. 1 Una volta che max/min esistono su $V \setminus \{0\}$, posso cercare i p.ti stazionari imponendo $\nabla Q(v) = 0$. Ora

$$\nabla Q(v) = \frac{2f(v)\langle v, v \rangle - 2v\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle^2}$$

Questo è uguale a 0 se e solo se $f(v)\langle v, v \rangle = v\langle f(v), v \rangle$
cioè se e solo se

$$f(v) = \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Numero

$$f(v) = \lambda v$$

Oss. 2 Se prendo $|\langle f(v), v \rangle|$, allora esistono max/min di Qui su

$$B = \{v \in V : |v| \leq 1\}$$

↑ tutta la palla

e min = 0 e max viene realizzato sul bordo (essendo una funzione 2-omogenea, cioè $|\langle f(\lambda v), \lambda v \rangle| = \lambda^2 |\langle f(v), v \rangle|$)
e quindi coincide con il max di $|Q(v)|$ sulla sfera,
e questo è max $|\lambda|$ con λ autovalore.

— 0 — 0 —

IN DIMENSIONE INFINITA L'ambiente è uno sp. di Hilbert H .

Sia data $f: H \rightarrow H$ lineare e simmetrica

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v \in H, \forall w \in H$$

Def. Una funzione $f: H \rightarrow H$ (anche non lineare e non simm.) si dice COMPATTA se per ogni successione $\{v_n\} \subseteq H$ LIMITATA esiste una sottosuccessione v_{n_k} t.c. $v_{n_k} \xrightarrow{\text{DEBOLE}} v_\infty$ e $f(v_{n_k}) \xrightarrow{\text{FORTE}} f(v_\infty)$

Teorema spettrale in dim. infinita

Sia H un Hilbert separabile, e sia $f: H \rightarrow H$ lineare, simmetrica e compatta. Allora H ammette una base Hilbertiana $\{v_n\}$ costituita da autovettori di f , cioè $f(v_n) = \lambda_n v_n$. Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Dim. Il problema iniziale è trovare almeno un autovettore

Fatto 1 Esiste almeno un autovettore.

Considero la funzione $R(v) = |\langle f(v), v \rangle|$ e dico che esiste il max di R in B .

Prendiamo una successione $\{v_n\} \subseteq B$ tale che $R(v_n) \rightarrow M$. Allora v_n ha una s.succ. v_{n_k} conv. debolmente, che continuo a chiamare v_n . Quindi $v_n \xrightarrow{\text{sup}} v_\infty$

$$\begin{array}{ccccccc} R(v_n) = |\langle f(v_n), v_n \rangle| & \longrightarrow & |\langle f(v_\infty), v_\infty \rangle| = R(v_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \uparrow & & \\ M & & f(v_\infty) & v_\infty & \text{sono una forte + una debole} & & \end{array}$$

Quindi $R(v_\infty) = M$, quindi esiste il max.

Ora ci sono 2 casi

Se Max $\neq 0$, allora non è raggiunto nell'origine, ma allora è il max di $|Q(v)|$, il quale è preso in un autovettore, perchè posso fare come nell'Oss. 1 senza Lagrange

Se $\text{Max} = 0$, allora $\langle f(v), v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$ e questo non basta per concludere che $f(v) \equiv 0$ (rotazione di 90°), però è vero se è simmetrica. Per dimostrarlo si usa l'identità

$$\langle f(v), w \rangle = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\langle f(v+w), v+w \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{si usa la} \\ \text{simmetria}}} - \underbrace{\langle f(v-w), v-w \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{si usa la} \\ \text{simmetria}}} \right)$$

Ma allora $\langle f(v), w \rangle = 0$ per ogni $w \in H$ e prendendo come $w = f(v)$ ho garantito che $f(v) = 0$.

In questo caso f è l'applicazione nulla e si diagonalizza facilmente.

Fatto 2 Procediamo come in dim. finita induttivamente.

- v_1 = autovettore trovato dal fatto 1
- $W = \text{Span}(v_1)$, f è simm. su $W^\perp$ che è invariante, quindi trovo v_2
- $W = \text{Span}(v_1, v_2)$ e in $W^\perp$ trovo $v_3 \dots$ e così via.

Se finisco in un numero finito di passaggi vuol dire che sono in dim. finita.

Altrimenti ottengo una succ. infinita di autovettori ortonormali $v_1, \dots, v_n, \dots$ tali che

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

Fatto 3 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ e così via

Banale perché sono ottenuti come max su palle dello stesso raggio ma in sottospazi sempre più piccoli.

Fatto 4 $|\lambda_n| \rightarrow 0$. Se non lo facessero, sarebbero maggiori di un certo $\epsilon > 0$.

Considero $\{v_n\}$ succ. limitata. Per l'ipotesi di compattezza le immagini $f(v_n)$ dovrebbero avere una succ. convergente fortemente. Ma $f(v_n) = \lambda_n v_n$ ed essendo ortogonali la distanza tra 2

qualunque di questi è $\geq 2\sqrt{2}$ (dimostrare per bene con Pitagora)

Fatto 5 Prendo $W = \{v \in H : \langle v, e_n \rangle = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$

Se $W = \{0\}$ allora ho finito.

Supponiamo che $W \neq \{0\}$. Se ora calcolo

$$\max \{ |\langle f(w), v \rangle| : \|v\| \leq 1 \text{ e } v \in W \}$$

otengo per forza 0, dovendo essere minore di tutti i λ_i precedenti che tendono a 0.

Ma allora $W = \ker f$

Fatto 6 Quindi non mi resta che aggiungere ai $\{v_n\}$ una base Hilbertiana di $\ker f$ (saranno quindi autovettori) e ho concluso.

— o — o —