

TEOREMA SPETTRALE IN $\mathbb{R}^n$ (in generale in dim. FINITA) $V =$ sp. vett. di dim. finita $\langle v, w \rangle =$ prodotto scalare in V definito positivo ($\langle v, v \rangle > 0 \ \forall v \neq 0$)

Def. Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ si dice simmetrica risp. al prodotto scalare se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v \in V, \forall w \in V$$

Se prendo una base ortonormale (esiste per G.S.), allora la matrice A che rappresenta f è simmetrica.

Infatti, detti x e y i vettori delle componenti di v e w deve essere

$$\langle v, w \rangle = x^t y$$

quindi

$$(Ax)^t y = \langle f(w), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = x^t Ay$$

da cui

$$\boxed{x^t A^t y = x^t Ay} \Rightarrow A = A^t \quad \begin{array}{l} \text{(perché prendendo} \\ x = e_i \text{ e } y = e_j \\ \text{abbiamo l'uguaglianza} \\ \text{elemento per elemento)} \end{array}$$

Teorema spettrale Se f è un'applicazione simmetrica, allora esiste una base ortonormale $v_1, \dots, v_n$ di autovettori.

In questa base il prodotto scalare è rappr. dalla matrice identica e l'applicazione f dalla matrice diagonale A con i λ_i autov. sulla diagonale. È una diagonalizzazione simultanea del prod. scalare e della matrice che rappresenta f . Gli autovalori sono REALI.

PASSI DELLA DIMOSTRAZIONE

Fatto 1 Un'applicazione simmetrica ammette almeno un autovettore reale.

Fatto 2 Se $W \subseteq V$ è un s. spazio vettoriale invariante, cioè $f(w) \in W$ per ogni $w \in W$, allora $W^\perp$ è a sua volta invariante, e la restrizione di f a $W^\perp$ è a sua volta simmetrica.

Dati il fatto 1 ed il fatto 2 si procede per induzione sulla dim. di V .

Per il fatto 1, esiste un autovettore λ_1 con corrispondente autovettore v_1 , che posso supporre con $|v_1| = 1$.

Prendo $W = \text{Span}(v_1)$, allora $W^\perp$ è invariante, ha dim. $n-1$ e f su W è simmetrica. Quindi f si diagonalizza su W mediante una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ che aggiunta al precedente completa il discorso.

— o — o —

Dim. fatto 2 Prendo $v \in W^\perp$ e voglio dim. che $f(v) \in W^\perp$, cioè che $\langle f(v), w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$. Ma
 $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = 0$ perché $v \in W^\perp$.
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad W$ perché è invariante

Oss. Qui non abbiamo usato la dimensione finita e la positività.
— o — o —

Dim. fatto 1 Per il teo. fond. dell'algebra esiste almeno un autovettore $\lambda \in \mathbb{C}$ a cui corrisponde un autovettore $v \neq 0$ pure lui complesso. Devo dim. che $\lambda = \bar{\lambda}$.

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, \bar{v} \rangle &= \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle f(v), \bar{v} \rangle = \langle v, f(\bar{v}) \rangle = \langle v, \overline{f(v)} \rangle \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad \text{coniugato} \\ &\quad \quad \quad \text{dell'autovettore} \\ &= \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

Ora $\langle v, \bar{v} \rangle \neq 0$, quindi semplifico.

Oss. In dim. infinita non c'è immediatamente il polinomio caratteristico.

— o — o —

CARATTERIZZAZIONE VARIAZIONALE DI AUTOVALORI/AUTOVETTORI

Def. Si dice QUOZIENTE DI RAYLEIGH il quoziente

$$Q(v) = \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

definito per ogni $v \neq 0$, perché il prod. scalare è def. pos.

Oss. 1 $Q(v)$ è 0-omogeneo, cioè $Q(\lambda v) = Q(v) \quad \forall \lambda \neq 0 \quad \forall v \neq 0$
[banale], quindi è costante sulle rette uscenti dall'origine.

Oss. 2 In dimensione finita $Q(v)$ è continuo

Oss. 3 Sup e inf di $Q(v)$ su $V \setminus \{0\}$ coincidono con sup/inf di $Q(v)$ sulla sfera $S = \{v \in V : |v| = 1\}$

[Facile perché la sfera intercetta tutte le semirette uscenti dall'origine]

Oss. 4 Sup e inf sono in realtà Max/min, perché coincidono Max/min sulla sfera, che esistono per Weierstrass.

Oss. 5 Max e min di $Q(v)$ su $V \setminus \{0\}$ coincidono con Max e min di $Q(v)$ su S , che a sua volta coincidono con Max e min di $\langle f(v), v \rangle$ su S , che posso provare a calcolare con i moltiplicatori di Lagrange

Posto $G(v) = \langle f(v), v \rangle$ e $\Phi(v) = \langle v, v \rangle$

devo cercare i pti v in cui

$$\nabla G(v) = \lambda \nabla \Phi(v)$$

Ora $\nabla \phi(v) = 2v$ (*)

$\nabla G(v) = 2f(v)$ (**)

Per cui la relazione dei moltiplicatori diventa $\lambda f(v) = \lambda v$,
cioè $f(v) = v$, quindi i candidati p.ti di max/min sono
gli autovettori e $G(v) = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda$, quindi

Max/min di $G(v)$ = Max/min di $Q(v)$ = Max/min autovalore
di f

Quindi almeno un autovalore (anzi quasi 2) esiste.

(*) $\phi(v+R) = \phi(v) + \langle \nabla \phi(v), R \rangle + o(|R|)$

$\phi(v+R) = |v+R|^2 = |v|^2 + 2\langle v, R \rangle + |R|^2$

(**) $G(v+R) = \langle f(v+R), v+R \rangle = \langle f(v) + f(R), v+R \rangle$

$= \langle f(v), v \rangle + \langle f(v), R \rangle + \langle f(R), v \rangle + \langle f(R), R \rangle$

$= \langle f(v), v \rangle + 2\langle f(v), R \rangle + \langle f(R), R \rangle$

$= G(v) + \langle \nabla G(v), R \rangle + o(|R|)$

Teorema

- Max e min di $Q(v)$ in $V \setminus \{0\}$ esistono
- coincidono con il max/min autovalore
- i p.ti di max/min sono i corrispondenti autovettori.

— o — o —