

Domanda generale Supponiamo di sapere che $v_n \rightarrow v_\infty$.
Volei dedurre che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(v_n) dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty) dx$$

Risposta: in generale NO, ma SI se φ è convessa

Dim. Nel caso in cui φ è C^2 avevamo dim. che

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b \quad \text{per ogni } a \text{ e } b$$

$$\begin{aligned} \text{Ma allora} \quad \varphi(v_n(x)) &= \varphi\left(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b\right) \\ &\geq \varphi(v_\infty(x)) + \varphi'(v_\infty(x)) \cdot (v_n(x) - v_\infty(x)) \end{aligned}$$

quindi

$$\int \varphi(v_n(x)) dx \geq \int \varphi(v_\infty(x)) dx + \int \varphi'(v_\infty(x)) (v_n(x) - v_\infty(x)) dx$$

e da questo segue il liminf.

$$\begin{aligned} &\langle \varphi'(v_\infty), v_n - v_\infty \rangle \\ &\downarrow \\ &0 \quad \text{perché basta la debole} \end{aligned}$$

— o — o —

$$\hat{F}(u) = \int_0^2 (u^2 + \arctan u) dx$$

Ora sappiamo che $\hat{F}$ ammette minimo in H^1 . Sia $u_0 \in \hat{X} = H^1$ un p.to di min. Volei dire che $u_0 \in C^1$ e così avrei finito.

Faccio l'analogo dell'Eq. di EULERO

$$\frac{1}{t} (\hat{F}(u_0 + tv) - \hat{F}(u_0)) = \quad \text{ora } u_0 \in H^1 \text{ e } v \in H^1$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^2 \left[(\dot{u}_0 + t \dot{v})^2 + \arctan(u_0 + tv) - \cancel{\dot{u}_0^2} - \arctan u_0 \right] dx$$

$\cancel{\dot{u}_0^2} + 2t \dot{u}_0 \dot{v} + t^2 \dot{v}^2$

$$= 2 \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} dx + t \int_0^2 \dot{v}^2 dx + \int_0^2 \frac{\arctan(u_0 + tv) - \arctan u_0}{t} dx$$

$\downarrow$
0

Panentesi: $\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} dx = \int_a^b f'(u) v dx$

$$f(u+tv) - f(u) = \cancel{f(u)} + tv f'(u) + \frac{1}{2} t^2 v^2 f''(\text{qualche parte}) - \cancel{f(u)}$$

Se divido per t resta $v f'(u) + \frac{1}{2} t v^2 f''(\text{qualche parte})$

$\downarrow \uparrow$ qui posso usare
i passaggi al
limite negli integrali

Data per buona la panentesi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{F}(u_0 + tv) - \hat{F}(u_0)}{t} = 2 \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} dx + \int_0^2 \frac{1}{1+u_0^2} v dx$$

Se u_0 è un p.to di minimo, allora il limite deve fare 0, cioè

$$\int_0^2 \left(2 \dot{u}_0 \dot{v} + \frac{1}{1+u_0^2} v \right) dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

Riscrivo come

$$\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} dx = - \int_0^2 \frac{1}{2} \frac{1}{1+u_0^2} v dx$$

$$\int_0^2 w \dot{\phi} dx = - \int_0^2 z \phi dx$$

Dice che z è
la derivata
debole di $\dot{u}_0$

Abbiamo così dimostrato che $\ddot{u}_0$ ammette derivata debole, la quale è

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1+u_0^2} \quad \text{che sta in } L^2 \quad (\text{sta pure sotto } \frac{1}{2})$$

Quindi $\ddot{u}_0 \in H^1$, quindi è $\frac{1}{2}$ Hölder, quindi continua.

Quindi u_0 è C^1 , anzi H^2 e inoltre

$$\ddot{u}_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{1+u_0^2} \quad \text{Uguaglianza tra funzioni in } L^2$$

A questo punto interviene il BOOTSTRAP!

→ u_0 è continua, quindi $\ddot{u}_0$ è continua, quindi u_0 è C^2 ,
quindi $\ddot{u}_0$ è C^2 , quindi u_0 è C^4 e così via a C^∞ .

Esempio $F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 - u^4) dx \quad u(0) = u(2) = 0$

Formulazione in H^1 , no problem.

È meno immediato da $F(u) \leq M_1$ dedurre $\int_0^2 \dot{u}^2 \leq M_2$

Dico che I^* inf. è $-\infty$. Come ci arrivo? Prendo una funzione qualunque, ad esempio $\sin x$ e poi prendo $u(x) = \lambda \sin x$

$$F(u) = \lambda^2 \int_0^2 \cos^2 x dx - \lambda^4 \underbrace{\int_0^2 \sin^4 x dx}_{>0} \rightarrow -\infty \quad \text{per } \lambda \text{ grande}$$

Esempio $F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 dx + \int_0^2 \sin u dx \quad u(0) = u(2)$

Prendo $u(x) \equiv \frac{3\pi}{2}$

Esempio

$$F(u) = \int_0^2 u^2 dx + \int_0^2 e^{-u} dx \quad u(0) = u(2)$$

$\inf = 0$, min. N.E. approx. da u costante altissima

MANCA QUALCOSA CHE LIMITI LE FUNZIONI!

Oss. Una condizione di D. basta per limitare le funzioni.
Una condizione del tipo

$$\int_0^2 u^{28}(x) dx \leq M$$

basta per limitare le funzioni?

In generale NO, ma se già sappiamo che $\int_0^2 [u'(x)]^2 dx \leq k$, allora SI.

[Per il teorema della media integrale. Essendo u continua, esiste un punto c in $[0, 2]$ t.c.

$$M \geq \int_0^2 u^{28}(x) dx = 2 \cdot u^{28}(c)$$

Ma allora $u^{28}(c) \leq \frac{M}{2}$.

Questo va bene per limitare u su tutto l'intervallo, indip. da c .

— o — o —