

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

= come dimostrare che il minimo esiste $\min \{F(x) : x \in X\}$
dove $F: X \rightarrow \mathbb{R}$

Speranza: usare un W. generalizzato. Servono 2 cose

- ① • Dada una succ. x_n con $F(x_n) \leq M$, allora $\exists$ s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$
- ② • s.c.i.

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \geq F(x_\infty)$$

[Prendo $m = \inf \{F(x) : x \in X\}$. Allora $\exists x_n$ t.c. $F(x_n) \rightarrow m$.
Allora $F(x_n) \leq m+1$ definitivamente. Allora a meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_\infty$. Ma allora

$$m \leq F(x_\infty) \stackrel{\text{def. inf.}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \stackrel{\text{②}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = m$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $F(x_n) \rightarrow m$

quindi $F(x_\infty) = m$]

Così non funziona mai, per via della COPERTA CORTA:

- se ho tante succ. convergenti, è facile avere ① ma diff. avere ②
- se ne ho poche, vale il viceversa.

— o — o —

APPROCCIO DEBOLE Voglio fare $\min \{F(x) : x \in X\}$

Trovo un ambiente $\hat{X} \supseteq X$ e trovo $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Richiediamo almeno che ① $\hat{F}(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$

Spero che

- ① $\min \{ \hat{F}(x) : x \in \hat{X} \}$ esista
- ② Almeno un p.to di min x_0 di $\hat{F}$ stia in X
- ③ $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$

Se queste 3 cose riescono, allora x_0 è un pto di minimo per il problema iniziale

Dim.: Prendo un qualunque altro $x \in X$ e ho che

$$F(x) \underset{\textcircled{0}}{\geq} \hat{F}(x) \underset{\textcircled{1}}{\geq} \hat{F}(x_0) \underset{\textcircled{3}}{=} F(x_0)$$

Terminologia: $\rightarrow$ trovare $\hat{F}$ e $\hat{X}$ è la formulazione debole
 $\rightarrow$ fare $\textcircled{1}$ è usare W .
 $\rightarrow$ fare $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ è REGOLARITÀ
— o — o —

Esempio

$$F(u) = \int_0^2 \{ [\dot{u}(x)]^2 + \arctan u(x) \} dx$$

$$X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, u(2) = 7 \}$$

FORMULAZIONE DEBOLE Prendo $X = H^1((0,2))$
= funzioni L^2 con derivata
debole in L^2

Data $u \in L^2$, sia $\dot{u}$ la sua derivata debole e ponga

$$\hat{F}(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + \arctan u) dx$$

Il punto $\textcircled{0}$ è gratis, cioè $\hat{F}(u) = F(u)$ se $u \in X$

Punto $\textcircled{1}$ Esistenza del minimo in $\hat{X}$. Servono semicontinuità e compattezza

Compattezza Se $F(u_n) \leq M$, allora u_n ha una s.succ. converg.

Fatto generale Sia una successione in $H^1(a,b)$.

Supponiamo che

$$(i) \quad \| \dot{u}_n \| \leq M \quad \int_a^b [\dot{u}_n(x)]^2 \leq M^2 \quad (\text{controllo sulle derivate})$$

(ii) qualcosa che controlli u_n (controllo sulle funzioni)

Allora esiste una sottosuccessione che converge nel senso che

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightarrow u_\infty && \text{uniformemente} \\ \dot{u}_{n_k} &\rightarrow \dot{u}_\infty && \text{conv. debole} \end{aligned}$$

Dim. L'altra volta abbiamo visto che

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq \int_s^t |\dot{u}_n(x)| dx \leq |t-s|^{1/2} \cdot \|\dot{u}_n\|^{1/2} \leq M |t-s|^{1/2}$$

Quindi l'ipotesi (i) garantisce che le u_n sono equi-Hölder.
Mi servirebbe che

$$|u_n(x)| \leq K \quad \text{per ogni } x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo è automatico se per esempio ho una condizione di Dirichlet in un estremo.

Questo per A-A basta per trovare una s.succ. tale che $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ uniformemente.

Vorrei anche che, a meno di ulteriori s.succ., $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$.

Dal fatto che $\|\dot{u}_n\| \leq M$ segue che $\dot{u}_n \rightharpoonup v$
Resta da vedere che v è la derivata
di u_∞ .
↑
a meno di s.succ.

$$\int \dot{u}_n(x) \phi(x) dx = - \int u_n(x) \dot{\phi}(x) dx \quad \forall \phi \in \dots$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$$\int v(x) \phi(x) dx = - \int u_\infty(x) \dot{\phi}(x) dx$$

e questo dice che $v(x)$ è la derivata debole di u_∞ .

Nell'esempio, dall'essere $F(u_n) \leq M_1$, voglio dedurre che $\| \dot{u}_n \| \leq M_2$

$$\int_0^2 \dot{u}^2 dx = F(u) - \int_0^2 \arctan u dx \leq F(u) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \leq M_1 + \pi$$

Semicontinuità Mi serve che se $u_n \rightarrow u_\infty$ come scritto sopra, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty)$$

Ci sono due termini

$$\int_0^2 \arctan u_n(x) dx \rightarrow \int_0^2 \arctan u_\infty(x) dx \quad (\text{indago dopo})$$

$$\int_0^2 [\dot{u}_n(x)]^2 dx = \|\dot{u}_n\|^2 \quad \text{Ma so che } \dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$$

e visto che la norma è semicontinua per convergenza debbe

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\dot{u}_n\|^2 \geq \|\dot{u}_\infty\|^2$$

— o — o —

Fatto generale

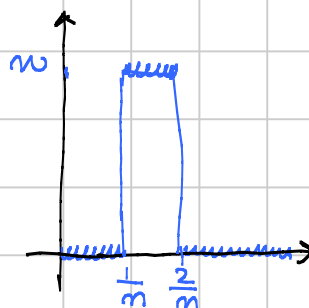
$f_n \rightarrow f_\infty$. Quando posso dire che

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$$

Questo è ① vero e facile se $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente

$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \forall x \text{ se } n \text{ è grande}$
 integro ed è finita

② falso in generale se ho solo conv. puntuale, vedi esempio $\rightarrow$



③ vero se ho convergenza puntuale DOMINATA

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in \text{zona di integrazione}$$

ed esiste $g(x)$ t.c. $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \text{zona di integr.}$

$$\int g(x) dx \text{ converge}$$

Nell'esempio $|\arctan u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, quindi bastava la
puntuale essendo dominata.

Se ci fosse stato $e^{u_n(x)}$ era uguale perché sappiamo già
che $|u_n(x)|$ sono limitate