

SPAZI DI SOBOLEV (Spazio H^1 in dim. 1)

Premessa: sia $u \in C^1(\mathbb{R})$ e sia $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$

$\uparrow$
a supporto compatto, cioè
nulla fuori da un certo
intervallo

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} u'(x) \phi(x) dx$$

① invece che su $\mathbb{R}$ integro su $[A, B]$

② integro per parti

③ il pezzo di bordo se ne va perché $\phi(A) = \phi(B) = 0$



Analogo su un intervallo $\int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b u'(x) \phi(x) dx$

per ogni $u \in C^1([a, b])$ e $\phi \in C^1([a, b])$ con $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

— o — o —

Spazi di Sobolev, definizione W

Dico che $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ se $u \in L^2(\mathbb{R})$ ed esiste $v \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R})$$

Brutalmente: $v(x)$ è il surrogato di $u'(x)$ nella formula di integrazione per parti

Se succede questo, $v(x)$ si dice DERIVATA DEBOLE di $u(x)$.

Analogamente, dico che $u \in W^{1,2}((a,b))$ se $u \in L^2((a,b))$ ed esiste $v \in L^2((a,b))$ t.c.

$$\int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C^1([a,b])$$

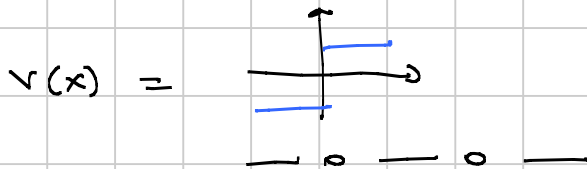
con $\phi(a) = \phi(b) = 0$

derivata prima

$W^{1,2}$ $\uparrow$ potenza nell'integrale

[Posso definire $W^{k,p}$ imponendo $u \in L^p$ e $v \in W^{k-1,p}$]

Esempio Si verifica facilmente (esercizio) che $u(x) = |x| \in W^{1,2}((-1,1))$ e la sua derivata debole è

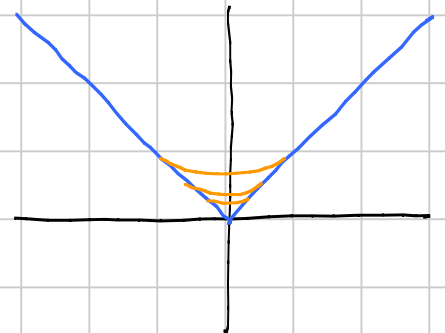


Spazi di Sobolev, definizione H

Dico che $u \in H^{1,2}(\mathbb{R})$ e v è la sua derivata debole se esiste una successione di funzioni $u_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \text{in } L^2(\mathbb{R}) \\ u_n' &\rightarrow v & \text{in } L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Esempio Approssimo $|x|$ con funzioni "arrotondate" e ottengo quello che voglio.



Oss. In modo analogo posso definire $H^{k,p}(\mathbb{R})$ e anche $H^{k,p}((a,b))$.

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO

$$H = W$$

D'ora in avanti ci interesseremo solo di $H^{1,2} = W^{1,2}$ (e si indica per brevità con H^1 sottintendendo il 2).

Fatto 1 Sia u_n una succ. di funzioni $C^1([a,b])$.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^2$$

$$u_n' \rightarrow v \quad \text{in } L^2$$

Allora v fa funzionare la formula di int. per parti, cioè

$$\int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C^1 \text{ con } \phi(a) = \phi(b) = 0$$

Dim.: la formula vale per ogni u per motivi classici

$$\begin{aligned} \langle u_n, \phi' \rangle \quad \int_a^b u_n(x) \phi'(x) dx &= - \int_a^b u_n'(x) \phi(x) dx \quad \langle u_n', \phi \rangle \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \int_a^b u(x) \phi'(x) dx &= - \int_a^b v(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

Oss. fondamentale: ho usato solo che $u_n \rightarrow u$ e $v_n \rightarrow v$

FATTO 2 Sia u_n una successione in H^1 e siano v_n le corrispondenti derivate deboli.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(a,b)$$

$$\|v_n\| \text{ limitata}$$

Allora, a meno di sottosuccessioni, abbiamo che $v_n \rightarrow v_\infty$.

Allora v_∞ è la derivata debole di u_∞ .

Dim. Per ipotesi v_n è derivata debole di u_n , cioè

$$\int_a^b u_n(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v_n(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \dots$$

$$\int_a^b u_\infty(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \dots$$

e questo è come dire che v_∞ è la derivata debole di u_∞ .

FATTO 3 Se $u \in H^1((a,b))$, allora u è almeno continua, anzi Hölder con esponente $\frac{1}{2}$, e

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(x) dx \quad \forall a \leq s < t \leq b$$

↑ derivata debole

Dim. Uso la definizione H^1 . Quindi esiste una successione u_n di funzioni C^∞ tali che

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \text{in } L^2 \\ u_n' &\rightarrow v & \text{in } L^2 \end{aligned}$$

Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$u_n(t) - u_n(s) = \int_s^t u_n'(x) dx$$

ma allora

funzione che vale 1
tra s e t e 0 altrove

$$|u_n(t) - u_n(s)| = \left| \int_s^t u_n'(x) dx \right| = |\langle u_n', 1_{[s,t]} \rangle|$$

$$\leq \left[\int_a^b |u_n'(x)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b 1_{[s,t]}^2(x) dx \right]^{1/2}$$

$$= \|u_n'\| \cdot |t-s|$$

sono equicontinui perché $u_n' \rightarrow v$

Quindi tutte le u_n sono $\frac{1}{2}$ -Hölder con costante di Hölder equi-limitata.

Quindi per Ascoli - Arzelà (e qui sto barando un minimo) a meno di sottosuccessioni convergono uniformemente ed il limite è a sua volta $\frac{1}{2}$ Hölder, quindi continuo.

Quindi, a meno di s.succ.

$u_n \rightarrow u$ uniformemente.

$$\begin{array}{lcl}
 u_n(t) - u_n(s) = \int_s^t u_n'(x) dx & = & \langle u_n', 1_{[s,t]} \rangle \\
 \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\
 u(t) - u(s) = \int_s^t v(x) dx & & \langle v, 1_{[s,t]} \rangle \\
 \text{basta conv. puntuale} & & \text{e basta la convergenza debole}
 \end{array}$$

— o — o —

Oss. Se $u \in L^2$, NON ha senso parlare del suo valore in un punto (potrebbe essere $+\infty$, e se lo cambio non cambio il suo essere L^2). Hanno senso solo gli integrali. Invece per le funzioni $u \in H^1$ ha senso considerare il valore in un punto, perché abbiamo dimostrato che sono continue.

— o — o —

Back to calcolo delle variazioni

$$F(u) = \int_0^1 |\dot{u}(x)|^2 dx + \int_0^1 \arctan(u(x)) dx + \int_0^1 u^2(x) dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \}.$$

Di sicuro esiste $\inf F(u)$ e lo chiamo m . Quindi esiste una successione u_n tale che $F(u_n) \rightarrow m$.

Definitivamente

$$F(u_n) \leq m + \epsilon$$

quindi

$$\int_0^1 |\dot{u}_m(x)|^2 dx \leq m+4 + \frac{F}{2}$$

$$\int_0^1 |u_m(x)|^2 dx \leq m+4 + \frac{F}{2}$$

Ma allora a meno di s.succ.

$$u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{su } L^2((0,1))$$

$$\dot{u}_m \rightarrow v_\infty \quad \text{su } L^2((0,1))$$

Per quanto detto prima $u_m \rightarrow u_\infty$ uniformemente, quindi

$$\int u_n^2 \rightarrow \int u_\infty^2$$

$$\int \arctan(u_m) \rightarrow \int \arctan(u_\infty)$$

$$\int \dot{u}_m^2 = \|\dot{u}_m\|^2 \quad \text{quindi a liminf è } \geq \|v_\infty\|^2$$

Moralmente: u_∞ è il minimo di F . Il problema è che sta solo in H^1 e non in C^1 .

— o — o —