

Convergenza debole In uno spazio di Hilbert H si dice che

$$v_m \rightarrow v_\infty$$

se $\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

Nei casi in cui c'è la base Hilbertiana, questo implica la convergenza "componente per componente".

Proprietà facili

(1) Se $v_m \rightarrow v_\infty$ e $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $v_m + u_m \rightarrow v_\infty + u_\infty$

$$\text{Dim.: } \langle v_m + u_m, w \rangle = \langle u_m, w \rangle + \langle v_m, w \rangle$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\langle u_\infty, w \rangle + \langle v_\infty, w \rangle = \langle u_\infty + v_\infty, w \rangle$$

per ogni $w \in H$.

(2) Se $v_m \rightarrow v_\infty$, allora $v_m \rightarrow v_\infty$

$$\text{Dim.: } \langle v_m, w \rangle = \langle v_m - v_\infty + v_\infty, w \rangle = \langle v_m - v_\infty, w \rangle + \langle v_\infty, w \rangle$$

$\downarrow$ zero
0

infatti

$$|\langle v_m - v_\infty, w \rangle| \leq \|v_m - v_\infty\| \cdot \|w\| \rightarrow 0$$

$\uparrow$
c.s.

$\downarrow$
0 per def. di lim. forte

(3) Se $v_m \rightarrow v_\infty$ e $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $\langle u_m, v_m \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v_\infty \rangle$
e $\|u_m\| \leq M$

$$\text{Dim.: } \langle u_m, v_m \rangle = \langle u_m, v_m - v_\infty + v_\infty \rangle = \langle u_m, v_m - v_\infty \rangle + \langle u_m, v_\infty \rangle$$

zero $\downarrow$

0

$\downarrow$
 $\langle u_\infty, v_\infty \rangle$

$$|\langle u_n, v_n - v_\infty \rangle| \leq \underbrace{\|u_n\|}_{\substack{\uparrow \text{c.s.} \\ \text{serie che sia limitato}}} \cdot \underbrace{\|v_n - v_\infty\|}_{\downarrow 0}$$

— 0 — 0 —

Fatto misterioso (vero, ma non servirà mai) Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $\|u_n\|$ è limitato.

Fatti FALSI (1) Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $\|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$

Esempio: Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana in dim. infinita, allora $e_n \rightarrow 0$, ma $\|e_n\| \rightarrow 1 \neq \|0\|$

(2) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $v_n \rightarrow v_\infty$, allora $\langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v_\infty \rangle$

Esempio: basta prendere $u_n = v_n = e_n \dots$

Nota bene Supponiamo che e_n sia base Hilbertiana. Allora

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \langle u_n, e_1 \rangle^2 + \langle u_n, e_2 \rangle^2 + \langle u_n, e_3 \rangle^2 + \dots \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\langle u_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle u_\infty, e_2 \rangle^2 + \langle u_\infty, e_3 \rangle^2 + \dots = \|u_\infty\|^2 \end{aligned}$$

SBAGLIATO PERCHÉ PER LE SOMME INFINITE IL LIM DELLA SOMMA NON È LA SOMMA DEI LIMITI.

— 0 — 0 —

Teorema Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \geq \|u_\infty\|$

Dim.:

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|(u_n - u_\infty) + u_\infty\|^2 \\ &= \|u_n - u_\infty\|^2 + \|u_\infty\|^2 + 2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle \\ &\geq \|u_\infty\|^2 + 2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ per def. di conv. debole
 $\|u_\infty\|^2$ 0

— 0 — 0 —

Spazio $L^2(\mathbb{R})$ o $L^2((a,b))$ Si dice che $f \in L^2(\mathbb{R})$ se
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 dx < +\infty$$

Si dice che $f \in L^2((a,b))$ se $\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty$
 $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema misterioso

(1) Sono spazi vettoriali

(2) Su questi spazi è definito

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) \quad (\text{o su } (a,b))$$

e questo è un prodotto scalare

(3) Rispetto a questo prodotto scalare $L^2(\mathbb{R})$ e $L^2((a,b))$ diventano spazi di Hilbert separabili

Dim.: (1) $|a+b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ da cui

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2 \quad \text{Integrando ...}$$

(2) $|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ per ogni a e b , da cui

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx$$

se convergono, allora converge

ma se $\int |f(x)g(x)| < +\infty$, allora converge $\int f(x)g(x)$.

(3) FATTO MISTERIOSO.

— o — o —

Oss. Posso definire $L^p(\mathbb{R})$ e di (a,b) per ogni $p \geq 1$ ponendo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty. \quad \text{Per } p \neq 2 \text{ sono "solo" BANACH}$$

Elementi di $L^2((0,1))$ possono essere brutti.

① Possono essere non limitati: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx < +\infty$$

② Possono essere non limitate in ogni sottointervallo.

$$f(x) = \frac{a}{|x|^{1/4}} + \frac{b}{|x-1/2|^{1/4}} + \frac{c}{|x-1/3|^{1/4}}$$

Ora numero $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$ i razionali in $(0,1)$ e poi posso

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{a_n}{|x-q_n|^{1/4}}} \quad \text{con } a_i > 0$$

$f_n(x)$

Mi serve che la serie converga in $L^2((0,1))$.

Per far questo basta essere sicuri che la serie delle norme converga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}} dx}_{\text{sono tutti minori di } \int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^{1/2}} dx} \right]^{1/2}$$

Basta fare in modo che $\sum a_n$ converga.

Nello spazio L^2 la disuguaglianza c.s. diventa:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

Disuguaglianza di HÖLDER.