

Def. Uno spazio metrico X si dice separabile se esiste un sottoinsieme $D \subseteq X$ che sia denso e numerabile.

Cioè $D = \{d_1, \dots, d_n, \dots\}$ e $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$ t.c.
 $\text{dist}(x, d_k) \leq \varepsilon$.

Teorema (Esistenza della base Hilbertiana)

In ogni spazio di Hilbert H separabile esiste almeno una base Hilbertiana.

Idea della dim.:

- ① Prendo il D denso numerabile $\{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$
- ② Induttivamente elimino d_k se $\in \text{Span}\{d_1, \dots, d_{k-1}\}$
- ③ GS sui rimanenti. (se non avessi fatto prima ② potrebbero venire degli zeri!)
- ④ Dovrei ora dimostrare che ogni v si scrive in modo unico come "comb. lineare infinita" degli eprodotti.

— 0 — 0 —

Brutta notizia Le palle non sono compatte se lo spazio ha dimensione infinita.

Dim.: (almeno se esiste una base Hilbertiana).

A suo tempo già fatto che compatto per ricopr. = comp. per succ.
 Prendiamo eu base Hilbertiana. Questa è contenuta in B con centro in 0 e raggio 1 . Questa non può avere s.succ. convergenti perché la distanza tra e_i e e_j è sempre $\sqrt{2}$ se $i \neq j$, quindi non possono esserci s.succ. di Cauchy.

Oss. Per lo stesso motivo nemmeno le sfere $S = \{v \in H : \|v\| = 1\}$ sono compatte.

CONVERGENZA DEBOLE

Sia u_m una succ. in H Hilbert, e sia $u_\infty \in H$. Dico che

① $u_m \rightarrow u_\infty$ (conv. forte) $\Leftrightarrow \|u_m - u_\infty\| \rightarrow 0$

② $u_m \rightarrow u_\infty$ (conv. DEBOLE) se $\langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$
per ogni $w \in H$.

FACILE: $u_m \rightarrow u_\infty \Rightarrow u_m \rightarrow u_\infty$

Dim.: $|\langle u_m, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| = |\langle u_m - u_\infty, w \rangle| \leq \|u_m - u_\infty\| \cdot \|w\|$
 $\uparrow$
C.S.

Teorema In uno spazio di Hilbert le palle sono debolmente compatte per successioni, cioè ogni successione u_m limitata ammette almeno una s.succ. convergente debolmente.

Moralmente: u_∞ ha come componente k -esima il limite delle componenti k -esime dei u_m . Esempio: se e_n è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightarrow 0$.

Fatto semplice Supponiamo che $u_m \rightarrow u_\infty$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\begin{array}{ccc} \langle u_m, e_k \rangle & \longrightarrow & \langle u_\infty, e_k \rangle \\ \uparrow & & \uparrow \\ k\text{-esima comp. di } u_m & & k\text{-esima comp. di } u_\infty \end{array}$$

Dim. (della compattezza debole delle palle usando che esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$).

È data una succ. u_n limitata, cioè $\exists R > 0$ t.c. $\|u_n\| \leq R$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Voglio trovare una sotto succ. u_{n_k} e un elemento u_∞ t.c.

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty, \text{ cioè } \langle u_{n_k}, w \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

Idee: ① Faccio il limite delle prime comp. di u_n

" " " seconde " " " e così via

② Prendo il vettore u_∞ che ha come componenti i limiti di sopra

③ Dimostro che è ben definito

④ Dimostro che è il limite debole.

Realizzo ① $|\langle u_n, e_1 \rangle| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{c.s.}}}{\leq} \|u_n\| \cdot \|e_1\| \leq R$

Le prime componenti sono limitate, quindi a meno di s.succ.

$$\langle u_n, e_1 \rangle \longrightarrow a_1$$

Idee per le seconde componenti (uso una s.succ. della precedente)

" " terze e così via

Con il procedimento diagonale trovo una s.succ. u_{n_k} tale che

$$\langle u_{n_k}, e_i \rangle \longrightarrow a_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots$$

D'ora in poi per semplificare la notazione chiamo u_n la sottosuccessione (come se gli altri termini non esistessero più).

②

Pongo:

$$u_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

③ Devo dim. che la serie del ② converge, il che è equivalente a dire che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$$

Prendiamo

$$a_1^2 + \dots + a_k^2$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
 $\langle v_m, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle v_m, e_k \rangle^2 \leq R^2$

$\langle v_m, e_1 \rangle \rightarrow a_1$
 $\langle v_m, e_2 \rangle \rightarrow a_2$

Infatti

$$\|v_m\|^2 = \underbrace{\langle v_m, e_1 \rangle^2 + \langle v_m, e_2 \rangle^2 + \dots}_{\downarrow} \leq R^2$$

se mi fermo alle prime k è ancora di più $\leq R^2$

④ Devo dimostrare che $\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle$.

Ora w sarà somma di una serie $w = \sum b_n e_n$.

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un w_ε con un numero finito di componenti, tale che $\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. (ogni vettore si approssima con vettori che hanno solo un numero finito di componenti) (w_ε è una somma parziale con n grande)

Ora

$$\begin{aligned}
 |\langle v_m, w \rangle - \langle v_\infty, w \rangle| &= |\langle v_m - v_\infty, w \rangle| \\
 &= |\langle v_m - v_\infty, w - w_\varepsilon + w_\varepsilon \rangle| \\
 &= |\langle v_m - v_\infty, w - w_\varepsilon \rangle + \langle v_m - v_\infty, w_\varepsilon \rangle| \\
 &\leq |\langle v_m - v_\infty, w - w_\varepsilon \rangle| + |\langle v_m - v_\infty, w_\varepsilon \rangle|
 \end{aligned}$$

$$|\langle v_m - v_\infty, w - w_\varepsilon \rangle| \leq \underbrace{\|v_m - v_\infty\|}_{\text{c.s.}} \cdot \underbrace{\|w - w_\varepsilon\|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon (\|v_m\| + \|v_\infty\|) \leq 2\varepsilon R$$

quindi qui non ci sono problemi.

Per l'altro termine sfruttato che siamo con un numero finito di componenti

$$w_\varepsilon = b_1 e_1 + \dots + b_k e_k$$

e inoltre

$$v_n - v_\infty = (\langle v_n, e_1 \rangle - a_1) e_1 + \dots + (\langle v_n, e_k \rangle - a_k) e_k + \text{ci sono anche le successive}$$

Il prodotto scalare tra i 2 diventa

$$\langle v_n - v_\infty, w_\varepsilon \rangle = \overbrace{b_1 (\langle v_n, e_1 \rangle - a_1) + \dots + b_k (\langle v_n, e_k \rangle - a_k)}^{\text{SOMMA FINITA}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Occhio alla dim. sbagliata

$$\langle v_n, w \rangle = \langle v_n, e_1 \rangle \cdot b_1 + \langle v_n, e_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v_n, e_k \rangle b_k + \dots$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

"Il limite della somma è la somma dei limiti vale SOLO per somme finite"

Ad esempio:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

D'altra parte

$$S_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1) \rightarrow +\infty$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 termine + numero
 piccolo dei termini