

**SPAZI DI HILBERT**

Uno spazio di Hilbert è uno spazio vett. su cui è definito un prodotto scalare definito positivo che lo rende uno spazio metrico completo.

**Dimensione finita**

Sia  $V$  sp. vett. di dim.  $n$  su cui è definito un prodotto scalare definito pos. ( $\langle v, v \rangle > 0 \ \forall v \neq 0$ ).

Allora esiste base ortonormale  $e_1, \dots, e_n$ , cioè

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Ogni  $v \in V$  si scrive in modo unico come

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

dove  $a_i = \langle v, e_i \rangle$ . Inoltre

$$\|v\|^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2$$

**Dim.** Gram - Schmidt (GS). Prendo una base  $e_1, \dots, e_n$  qualunque poi definisco

$$\bar{e}_1 := e_1$$

$$\bar{e}_2 := e_2 - \frac{\langle e_2, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle} \bar{e}_1$$

$\vdots$

$$\bar{e}_k := e_k - \frac{\langle e_k, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle} \bar{e}_1 - \dots - \frac{\langle e_k, \bar{e}_{k-1} \rangle}{\langle \bar{e}_{k-1}, \bar{e}_{k-1} \rangle} \bar{e}_{k-1}.$$

In questo modo  $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0$  se  $i \neq j$  (base ortogonale).

Poi concludo (ortonormalizzando)  $e_i = \frac{\bar{e}_i}{\|\bar{e}_i\|}$ .

Moralmente: uno sp. vett.  $V$  di dim. finita con prod. scal. def. positivo è come se fosse  $\mathbb{R}^n$ .

$$v \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

In dimensione infinita ci sono due nozioni di base:

- base algebrica: insieme  $\mathcal{B} \subseteq H$  tale che ogni elemento  $v \in H$  si scrive in modo unico come comb. lin. di elem. di  $\mathcal{B}$ , cioè

$$\forall v \in H \quad \exists n \geq 1 \quad \exists v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B} \quad \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \quad (\text{occhio: } n \text{ non è fisso, ma dipende da } v)$$

[Si può dim. che una base algebrica esiste sempre, ma a noi non serve]

- base Hilbertiana: insieme (finito o) numerabile  $\{e_m\}_{m=1,2,\dots}$  tale che

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{ortonormali})$$

e tale che ogni  $v \in H$  si scrive in modo unico come

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

— 0 — 0 —

### Serie di vettori

Sia  $v_1, \dots, v_n, \dots$  una successione di vettori.

Dico che

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

se, costruendo le somme parziali

$$S_1 = v_1, \quad S_2 = v_1 + v_2, \quad \dots, \quad S_k = v_1 + \dots + v_k$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = v$$

(Ho usato che  $\mathbb{H}$  è sp. vettoriale per fare le somme, e che è metrico per fare i limiti)

Come dimostrare che una serie di vettori converge?

Cov. totale  $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < +\infty}_{\text{serie di numeri}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} v_k \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$

L'implicazione vale se lo spazio  $H$  è completo

Dim.  $S_n = \sum_{k=1}^n v_k \quad \bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \|v_k\|$

Se dimostro che  $S_n$  è di Cauchy ho vinto. So per ipotesi che  $\bar{S}_n$  è di Cauchy. Sia  $n > m$

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|v_n + v_{n-1} + \dots + v_{m+1}\| \\ &\leq \|v_n\| + \|v_{n-1}\| + \dots + \|v_{m+1}\| \\ &= \bar{S}_n - \bar{S}_m \end{aligned}$$

Fisso  $\varepsilon > 0$ . Se  $n$  ed  $m$  sono grandi il RHS  $\leq \varepsilon$ , quindi pure  $\|S_n - S_m\| \leq \varepsilon$ .

— o — o —

Sia ora  $e_1, \dots, e_n, \dots$  una base Hilbertiana, allora

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k}_{\text{vettori}} \text{ converge} \iff \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}_{\text{numeri}} \text{ converge}$$

Dim. Definisco  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ ,  $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ ,  $n > m$

$$\|S_n - S_m\|^2 = \underbrace{\|a_n e_n + \dots + a_{m+1} e_{m+1}\|^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Def } S_k}} = a_n^2 + \dots + a_{m+1}^2 = \bar{S}_n - \bar{S}_m$$

Questo mostra che in questo caso  $S_n$  di Cauchy  $\iff \bar{S}_n$  di Cauchy

$\Updownarrow$

$\Updownarrow$

$\sum a_n e_n$  conv.

$\sum a_n^2$  conv.

— o — o —

Data una base Hilbertiana  $e_k$ , abbiamo che ogni  $v \in H$  si scrive come

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

Inoltre  $a_k = \langle v, e_k \rangle$  e  $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

Inoltre se  $v = \sum a_k e_k$  e  $w = \sum b_k e_k$ , allora

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

Dim. (che  $a_k = \langle v, e_k \rangle$ ). Dette  $S_n$  le somme parziali, si ha che

$$v = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n, \text{ cioè } S_n \rightarrow v$$

Dico che  $\langle S_n, w \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle$  per ogni  $w \in H$

Infatti

$$|\langle S_n, w \rangle - \langle v, w \rangle| = |\langle S_n - v, w \rangle| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \underbrace{\|S_n - v\|}_0 \cdot \underbrace{\|w\|}_{\text{fisso}}$$

[Dim. di C.S.  $p(t) := \|v + tw\|^2 = \|v\|^2 + 2t\langle v, w \rangle + t^2\|w\|^2 \geq 0$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , quindi  $\Delta \leq 0$ , quindi

$$\langle v, w \rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \leq 0$$

aggiustando viene C.S.]

Lo applico con  $w = e_k$  e ottengo  $\langle S_n, e_k \rangle \rightarrow \langle v, e_k \rangle$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ 0 \text{ per } n < k \\ a_k \text{ per } n \geq k \leftarrow \text{definitivo} \\ \downarrow \\ a_k \end{array}$$

Esercizio. Dimostrare formula per  $\|v\|$  e per  $\langle v, w \rangle$ .