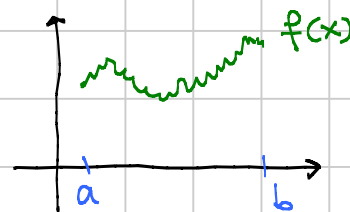


SIGNAL PROCESSING Sia $f(x)$ una funzione data

$$\min \left\{ \int_a^b [\dot{u}(x)]^2 + [u(x) - f(x)]^2 dx : u \in C^1([a,b]) \right\}$$

Pensiamo $f(x)$ come un segnale ricevuto, che può essere alterato dal "rumore".



Il problema consiste nel recuperare il "vero" segnale a partire da quello arrivato $f(x)$.

Un possibile approccio è risolvere il pbm. di minimo.

Inferiori

→ tenere basso il termine con $\dot{u}^2$ vuol dire "segnale smooth"

→ tenere basso il termine $|u - f|^2$ vuol dire che u è "simile" a f .

Il funzionale è

$$F(u) = \int_a^b [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf + f^2] dx$$

↓ è una costante (il suo integrale)
quindi lo posso eliminare

mi riduco a minimizzare

$$\int_a^b [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf] dx$$

L'equazione di Eulero diventa...

$$--- [\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u})]' = \varphi_u(x, u, \dot{u}) ---$$

$$[2\dot{u}]' = 2u - 2f, \quad \text{cioè}$$

$$\ddot{u} = u - f$$

Eq. diff. lineare a coeff. costanti
non omogenea $\Rightarrow$ Analisi 1

Al bordo vengono
cond. di NEUMANN
 $\dot{u}(a) = \dot{u}(b) = 0$

La soluzione buona dell' eq. diff. è UNICA ed è l'unico pto di minimo in quanto l'integranda del funzionale è convessa in $\ddot{u}$ e convessa in u .

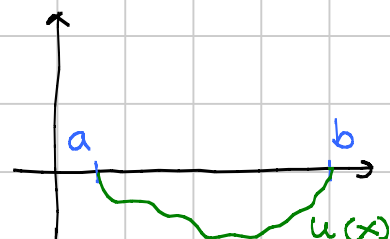
Esercizio Mostrare esplicitamente che $F(u) \geq F(u)$ scrivendo i termini.

— o — o —

Esempio meccanico

$$\min \left\{ \int_a^b [\dot{u}(x)]^2 + k u(x) dx : u \in C^1([a,b]) \text{ con } u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

$u(x)$ rappresenta la posizione di un filo sospeso tra 2 pti a e b.



Il termine $\dot{u}^2$ è un termine elastico, che rappresenta quanto costa allungare il filo (a rigore dovrei mettere $\sqrt{1+\dot{u}^2}$ che interviene nella length della curva)

Il termine ku rappresenta la convenienza di stare nelle zone a potenziale basso (penso $k = g$ gravità).

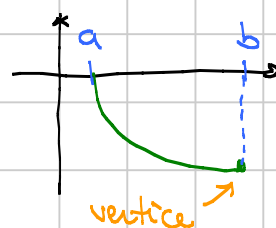
L'eq. di Eulero diventa $[2\dot{u}]' = k$, cioè $2\ddot{u} = k$, da cui il minimo è l'unica parabola che passa per i pti dati. È un minimo ed è unico perché $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = kx$ sono convessi, e la prima lo è strettamente.

Oss. Se non poniamo condizioni al bordo, l'inf. era banalmente $-\infty$ (rette orizzontali basse)

Se poniamo $u(a) = 0$ e basta, dovremo risolvere

Eulero con $u(a) = 0$ e $\dot{u}(b) = 0$

Se poniamo $u(a) = u(b)$ l'inf. era $-\infty$ come nel caso senza condizioni.



— o — o —

CASO NON CONVESSO

$$F(u) = \int_a^b \varphi(\dot{u}) dx$$

$\uparrow$ non convessa

Esempio 1 $\min \left\{ \int_0^2 \sin(\dot{u}(x)) dx : u \in C^1, u(0) = u(2) = 0 \right\}$

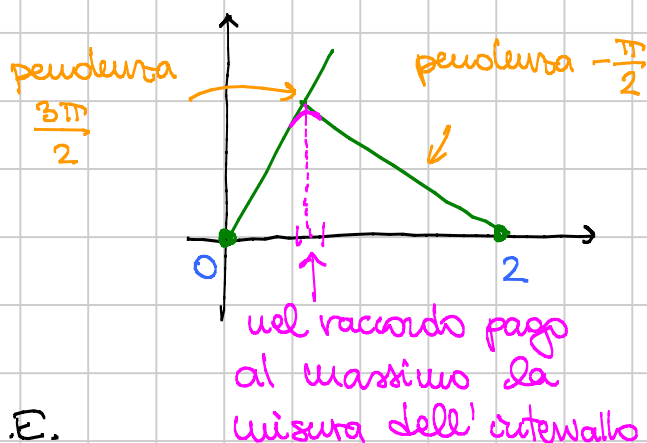
Eulero diventa $(\cos \dot{u})' = 0$, cioè $-\sin \dot{u} \cdot \ddot{u} = 0$

Le rette sono comunque soluzioni.

Oss. Senza condizioni al bordo il minimo era -2 , ottenuto da una qualunque $u(x)$ con $\dot{u}(x) = \frac{3\pi}{2}$

Con le condizioni al bordo non posso fare meno di -2 , e nemmeno posso fare -2 , ma posso avvicinarmi quanto voglio a -2 .

L'esempio non è C^1 , ma posso appiattirlo con un raccordo vicino all'angolo



Quindi

① su C^1 l'inf. è -2 ed il min. N.E.

② Se ammetto competitori che sono C^1

tranne in un pto a mia scelta, allora il min esiste ed è -2 .

MORALE: nel caso non convesso i minimi hanno poca voglia di esistere

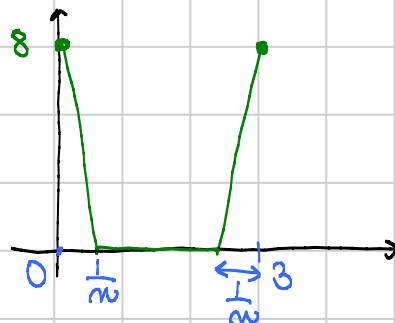
Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^3 |\dot{u}(x)|^{1/2} + [u(x)]^2 dx : u(0) = 0 = u(3) \right\}$

$\uparrow$ $\sqrt{x}$ è non convessa $\uparrow$ questo è convesso

Sotto 0 non ci posso andare, ma mi ci posso avvicinare quanto voglio!

La derivata nei tratti laterali è $8m$,
quindi in ciascuno dei 2 tratti laterali
pago

$$\int_0^{\frac{1}{m}} |8m|^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{8} \sqrt{m} \rightarrow 0$$



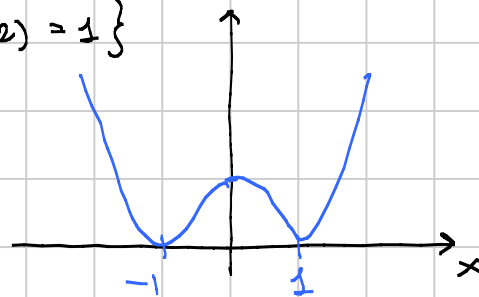
Anche sul secondo termine pago $\int_0^{\frac{1}{m}} [u(x)]^2 \leq \frac{1}{m} \cdot 64 \rightarrow 0$

Quindi l'inf. è 0 ed il minimo non esiste.

La colpa è la NON CONVESSITÀ del termine con $\dot{u}$.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^2 \varphi(u) dx : u(0) = 0, u(2) = 1 \right\}$

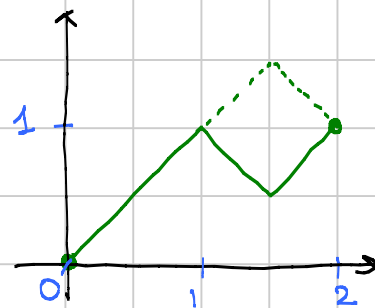
dove $\varphi(x) = (x^2 - 1)^2$.



Oss: φ è non convessa e le derivate
meno care sono $\dot{u}(x) = \pm 1$

Ora riesco a realizzare le condizioni al
bordo usando solo $\dot{u}(x) = \pm 1$

Come prima $\inf = 0$ e $\min$ N.E.



E se fosse $u(0) = 0$ e $u(2) = 4$?

Lo stesso trucco non funziona. Ora il
minimo esiste e l'unico p.to di min.
è la retta.

Considero il problema con $\bar{\varphi}(x)$ invece
di $\varphi(x)$. Nota $\bar{\varphi}(x)$ è la convessificata
di $\varphi(x)$.

Questo problema è convesso e ha soluzione

(la retta). Il problema originario ha $\inf$ in teoria + grande.



Detto meglio, sia $\bar{F}(u)$ il nuovo funzionale, sia u la retta e w qualcos'altro. Allora

$$F(w) \geq \bar{F}(w) \geq \bar{F}(u) = F(u)$$

↑
la retta è minimo
per $\bar{F}$

↑ perché la retta ha pendenza
2 e $\varphi(2) = \bar{\varphi}(2)$.

— 0 — 0 —